LEZ. 1 SERIE

La rappresentazione decimale di un numero razionale può essere limitata oppure periodica

$$\frac{4}{3} = 1,333\ldots = 1,\bar{3}$$

ottenibile facendo $1 + \underbrace{\frac{3}{10}}_{\text{Ragione fissa pari a } \frac{1}{10}} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$ cioè somma di infiniti addendi che sono in progressione geometrica

Il numero è il limite superiore di:

$$1$$
$$1 + \frac{3}{10}$$
$$1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} \ldots$$

possiamo associare a questo allineamento decimale periodico una successione di somme parziali, cioè somme ottenute considerando la parte intera, la parte intera più la 1ª cifra decimale, la parte intera più la prima cifra decimale più la seconda cifra decimale ecc.
Abbiamo una successione di numeri crescenti, che tende ad un certo limite che è anche l'estremo superiore della successione stessa.

Illustriamo un meccanismo che consente di associare a una data successione $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ una nuova successione al cui comportamento siamo interessati e l'informazione viene data sulla successione di partenza

Sia data la successione di numeri reali

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \qquad\qquad a_n$

dalla quale ne costruiamo un'altra, di somme parziali

$s_0 := a_0$

$s_1 := a_0 + a_1 = s_0 + a_1$

$s_2 := a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$

$\dots$

$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = S_{n-1} + a_n$

Dunque si può scrivere:

$$s_0 := a_0 \qquad S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

equival. $S_n = S_{n-1} + a_n$

Questa successione di somme parziali si chiama serie di cui S_n sono delle somme parziali, o anche ridotte. Essa è generata da un'altra successione a_n, quella su cui abbiamo informazione iniziale che si chiama successione dei termini della serie.

I TERMINI DELLA SERIE SONO I SINGOLI ADDENDI, CHE VENGONO PROGRESSIVAMENTE ACCUMULATI NELLE SOMME PARZIALI. LA SERIE È LA SUCCESSIONE DELLE SERIE PARZIALI

L'INTERESSE È IL COMPORTAMENTO AL LIMITE DELLA SUCCESSIONE S_n DELLE SOMME PARZIALI.

Diremo che una serie è convergente, divergente oppure priva di limite, irregolare, a seconda che la successione delle somme parziali sia convergente, divergente, positivamente o negativamente oppure priva di limite, irregolare.

UNA SERIE NON È UNA PARTICOLARE SUCCESSIONE, MA PIUTTOSTO UN MODO PARTICOLARE (RICORSIVO) PER ASSEGNARE UNA SUCCESSIONE.

Si può difatti scrivere una doppia uguaglianza

$$\left.\begin{aligned} S_0 &:= a_0 \\ S_n &:= S_{n-1} + a_n \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} a_0 &= S_0 \\ a_n &= S_n - S_{n-1} \end{aligned}$$

PROGRESSIONE GEOMETRICA è una cosa del tipo

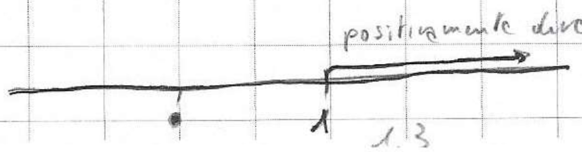
$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$

La successione delle somme parziali ~~dell~~ della serie che così si ottiene, nel caso della serie geometrica è:

$$S_n^{(x)} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} n+1 & \text{successione divergente positivamente } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1 \end{cases}$$

$x \geq 1$, $S_x(n) \geq n+1$

$x^{n+1} = x \cdot x^n$



Una serie è convergente, divergente oppure irregolare (priva di limite) secondo che tale sia la successione delle somme parziali (ridotte).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$S_n(x) = \begin{cases} n+1 & x=1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases}$$

$x \geq 1$ la serie diverge positivamente

$|x|<1$ cioè $-1<x<+1$ questa successione tende a $\emptyset$ dunque essa tende a $\frac{1}{1-x}$.

Questo limite della successione delle somme parziali è quello che comunemente si chiama la somma della serie.

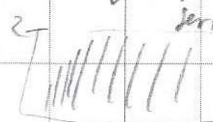
questa scrittura da un lato indica la serie geometrica di ragione x, ma per gli x in valore assoluto minore di 1 possiamo anche scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{x } |x|<1$$

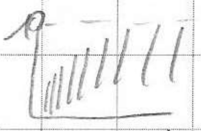
intendendo dire che questa funzione, $\frac{1}{1-x}$, è la somma della serie, cioè il limite della successione delle somme parziali.

somme e somme ordinamento somme parziali della serie geometrica.

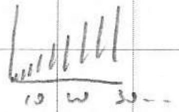
Ragione $= \frac{1}{2}$ $(x=\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ convergenza $= 2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$



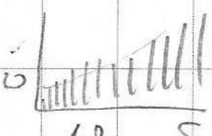
Ragione $= \frac{9}{10}$ $\Rightarrow$ convergenza $= 10 = \frac{1}{1-\frac{9}{10}}$



Ragione $= 1$ $\Rightarrow$ convergenza $= n+1$

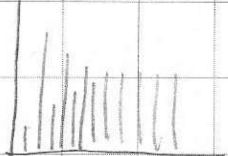


Ragione $= 1{,}02$ $\Rightarrow$

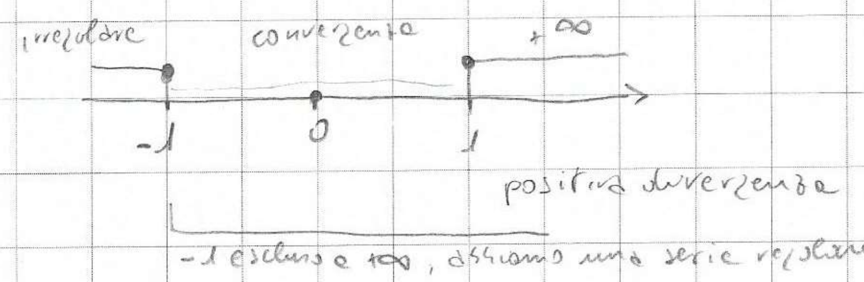


funzione convesso

Ragione $= -0{,}8$ $\Rightarrow$



LA SERIE GEOMETRICA È CONVERGENTE SE E SOLO SE LA RAGIONE È, IN VALORE ASSOLUTO, MINORE DI 1.



LA SERIE GEOMETRICA È UNA SERIE MOLTO PARTICOLARE PER ALMENO DUE RAGIONI: LA PRIMA È CHE NOI POSSEDIAMO UNA FORMULA ESPLICITA PER LA SOMMA PARZIALE n_{esima} E L'ABBIAMO UTILIZZATA E QUESTA NON

1) $S_x(n)$

È LA REGOLA, MA L'ECCEZIONE; TROVEREMO UNA SERIE IN CUI È SPONTANEO FAR INTERVENIRE IL PARAMETRO x (QUINDI UNA SERIE GEOMETRICA PER OGNI VALORE DEL PARAMETRO x). IN GENERALE CONOSCIAMO I TERMINI E VOGLIAMO DEDURRE LA CONVERGENZA, LA DIVERGENZA, LA MANCANZA DI LIMITE DI QUESTA SERIE IN BASE ALL'INFORMAZIONI CHE POSSEDIAMO SUI TERMINI DELLA SERIE. NON ABBIAMO IN GENERALE UNA FORMA ESPLICITA PER LA FORMA PARZIALE.

LA SECONDA RAGIONE È QUANDO SEGUE: LA SERIE GEOMETRICA CONVERGE SE E SOLO SE $|x|<1$

2) $|x|<1$

$a_n = x^n \to 0$

E QUESTI x SONO QUELLI PER I QUALI IL TERMINE n_{esimo} DELLA SERIE, che è $a_n = x^n$ TENDE A 0, CIOÈ SONO QUELLI PER CUI LA SUCCESSIONE TENDE A 0, È INFINITESIMA.

IL FATTO CHE IL TERMINE GENERALE n

HA A CHE FARE CON LA CONVERGENZA DELLA SERIE

SI NOTI CHE $S_n - S_{n-1} = a_n$

SUPPONIAMO CHE LA SERIE CONVERGA, OVVERO CHE S_n TENDA AD UN LIMITE FINITO S; ALLORA ANCHE S_{n-1} TENDE A S PERCHÉ È LA STESSA SUCCESSIONE LETTA SCALANDO GLI INDICI DI UN PASSO, ALLORA LA DIFFERENZA $S_n - S_{n-1}$ TENDE A 0

$$\begin{array}{cc} S_n & S_{n-1} \\ \downarrow & \downarrow \\ S & S \end{array}$$

SE LA SERIE CONVERGE, LA SUCCESSIONE DEI TERMINI TENDE A 0, È INFINITESIMA, OVVERO:

def: CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE AFFINCHÉ UNA SERIE SIA CONVERGENTE È CHE LA SUCCESSIONE DEI TERMINI SIA CONVERGENTE A 0 (INFINITESIMA).

Quindi ribaltando il discorso se a_n non tende a 0 allora la serie non può convergere

Nel caso della serie geometrica la convergenza a 0 di a_n non solo è necessaria ma è anche sufficiente. In altre parole gli x per cui si ha convergente sono tutte e solo quelle per cui la successione a_n tende a 0. Questo è un caso estremamente particolare.

LA SERIE ARMONICA (esempio di serie particolare)

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{per } n \geq 1$$

TUTTI I TERMINI, IN QUESTA SERIE, SONO MAGGIORI DI 0 => LA SUCCESSIONE S_n È UNA SUCCESSIONE MONOTONA CRESCENTE, QUINDI HA SEMPRE LIMITE, FINITO O INFINITO.
QUESTO LIMITE È IL SUO ESTREMO SUPERIORE.
L'ALTERNATIVA È FRA CONVERGENZA E POSITIVA DIVERGENZA. NON POSSIAMO AVERE IRREGOLARITÀ.

IN QUESTO CASO SI TRATTA DI DECIDERE SE QUESTA SERIE È LIMITATA SUPERIORMENTE O NO.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

...

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = H_n$

altro simbolismo della serie armonica

Questa successione tende a ∞. determinato con uno ingegnoso dimostrato notando una caratteristica quando n è potenza di 2 (lez 34' circa)

LA SERIE ARMONICA DIVERGE POSITIVAMENTE, NONOSTANTE IL FATTO CHE IL TERMINE n_{esimo} $(\frac{1}{n})$ TENDA A 0.

UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI È CONVERGENTE (AUT) OPPURE POSITIVAMENTE DIVERGENTE. (NON PUÒ ESSERE IRREGOLARE)

Altra serie notevole:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \quad n \geq 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

serie studiata da Pietro Mengoli

Spezziamo $\frac{1}{k(k+1)}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+B\cdot k}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow A+B=0 \quad e \quad A=1, \quad B=-1$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Serie di Mengoli

$$S_n = \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{k=3} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}_{k=n} = 1-\frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \text{ per } n\to\infty$$

la serie è convergente, con somma 1

queste serie vengono spesso chiamate telescopiche in cui si riesce a scrivere il termine n-esimo come differenza fra i due termini

Come va all'∞ il termine n-esimo: $\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ la successione $\frac{1}{n(n+1)}$ si comporta al limite come $\frac{1}{n^2}$.

serie studiata nella prossima lez, vedremo che è convergente

Eulero ha dimostrato che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \dots$

LEZ 2 CRITERI DI CONVERGENZA

Inizio - Riepilogo serie a termini positivi
Criterio del confronto
Criterio del rapporto
Assoluta convergenza
Criterio della radice
Serie a segni alterni

Nella precedente lezione ci siamo occupati della nozione di **serie**, che non è una particolare successione, ma un modo particolare di dilegnare una successione

Se ho una successione $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ e questa associamo associato la successione così definita $\begin{cases} S_0 := a_0 \\ S_n := S_{n-1} + a_n \end{cases}$

è una serie di dice convergente, divergente o indeterminata (irregolare) secondo che tale sia la cosiddetta successione delle cosiddette somme parziali, cioè la successione S_n

Una condizione necessaria, ma non sufficiente affinché una serie sia convergente è che la successione a_n tenda a 0, sia cioè infinitesima.

Se i termini della serie, cioè i numeri a_n, sono tutti maggiori o uguali a 0 allora la successione S_n è minore o uguale S_{n+1}, cioè è una successione monotona crescente (in senso lato): $a_n \geq 0 \Rightarrow S_n \leq S_{n+1}$
e quindi, come tale, o converge o diverge positivamente quindi ha come limite il proprio estremo superiore. In altre parole non può essere indeterminata.
L'alternativa è fra la convergenza o la positiva divergenza

Valgono le proprietà di somma fra serie e di un prodotto fra uno scalare con una serie.

$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

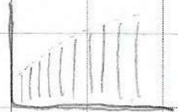
$b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ La somma parziale n-esima di questa serie somma è:

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

se le serie è convergenti rimane convergente

$$\sum_{k=0}^{n} c\, a_k = c \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{\text{il carattere è inalterato}}$$

LA SERIE ARMONICA SEMPLICE $\frac{1}{n}$ È UNA SERIE POSITIVAMENTE DIVERGENTE, ANCORCHÉ IL SUO TERMINE n-esimo CONVERGA A 0.



ha una convergenza $\log n$; $\frac{1}{x^2}$ converge a $\frac{\pi^2}{6}$ (1,64);

Fine riepilogo

SERIE A TERMINI POSITIVI O NULLI $a_n \geq 0$

STABILIAMO CRITERI DI CONVERGENZA

È molto raro disporre di una formula esplicita per la somma parziale di una serie. Vogliamo poter dedurre dal comportamento della successione dei termini condizioni sufficienti per garantire o la convergenza o la positiva divergenza o in qualche caso anche l'inesistenza del limite.

convergente o positivamente divergente

$a_n \geq 0 \quad S_n \nearrow$

Una serie a termini positivi è convergente se e solo se la successione delle somme parziali è limitata superiormente, visto che il limite, per una successione monotona crescente altro non è che l'estremo superiore.

CRITERIO DEL CONFRONTO

$$\sum_{n\geq 0} a_n \qquad \sum_{n\geq 0} b_n \ , \quad 0 \leq \underset{\text{a è minorante}}{a_n} \leq \overset{\text{maggiorante}}{b_n} \quad \forall n$$

Se la serie maggiorante (la serie delle b_n) è convergente, allora è convergente anche la serie minorante.

Se la serie minorante è divergente positivamente allora anche la serie maggiorante è divergente positivamente.

def.: UNA SERIE A TERMINI POSITIVI MAGGIORATA DA UNA SERIE CONVERGENTE È ESSA STESSA CONVERGENTE; UNA SERIE A TERMINI POSITIVI MINORATA DA UNA SERIE POSITIVAMENTE DIVERGENTE È ESSA STESSA POSITIVAMENTE DIVERGENTE.

Dimostrazione

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq S$$

Dimostrazione

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \ \ldots$$

Esempio criterio di convergenza:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

serie di Mengoli

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \underbrace{\frac{1}{n^2+n}}_{\text{serie convergente}}$$

si comporta come

→ è anche convergente la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{c}{n(n+1)}$

PER APPLICARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO DOVREI POTER MAGGIORARE $\frac{1}{n^2}$ CON $\frac{1}{n^2+n}$, PERÒ DEVO APPLICARE UNA SERIE DEL TIPO $\frac{c}{n^2+n}$ $c>1$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{c}{n^2+n}$$

13' $n^2+n \leq 2n^2$ per $c=2$ c.v.d.

Un esame più approfondito dimostrerebbe che le serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1 \quad \text{sono convergenti}$$

Un'altro tipo di confronto si può fare per trovare la divergenza della serie armonica.
Abbiamo visto che dalla successione delle somme parziali è possibile estrarre una sottosuccessione che è divergente positivamente. La sottosuccessione è costituita dai termini che hanno come indici le potenze di 2, essa è divergente positivamente e quindi lo è anche la serie da cui essa è tratta

Vediamo un altro tipo di ragionamento

Il numero e, alla base dei logaritmi naturali si può ottenere come

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \forall n \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1^{\ln e}$$

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

il termine generale della serie di destra è minorato dal termine generale della serie posta a sinistra

e quando vado a scrivere la somma parziale Nesima della serie che ha come termine generale $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ho:

per $n=1$ ho

$$\left.\begin{aligned} &\ln 2 - \ln 1 + \\ &\ln 3 - \ln 2 + \\ &\dots \\ &\ln(n+1) - \ln n \end{aligned}\right\}$$

$\hookrightarrow$ tende a $+\infty$

Siamo stati capaci di minorare questa serie a termini positivi con una serie divergente positivamente, quindi la serie è divergente positivamente

LA SERIE ARMONICA SEMPLICE $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots$ È DIVERGENTE POSITIVAMENTE, ANCORCHÉ LA SUCCESSIONE DEI SUOI TERMINI TENDA A 0; LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA $\frac{1}{n^\alpha}$, PER TUTTI GLI $\alpha > 1$ È CONVERGENTE, DIMOSTRANDOLO PER GLI α DA 2 IN POI

CI SONO SERIE CON I TERMINI MAGGIORI DI 0 : $a_n > 0$. PER QUESTE SERIE VALE UN ALTRO CRITERIO, IL CRITERIO DEL RAPPORTO.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Si va ad esaminare ~~xxx~~ il rapporto tra un termine e il termine precedente.

$a_n > 0$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e si va a studiare il comportamento al limite di questo rapporto.

Supponiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ la serie è convergente

Dimostrazione: $a_{n+1} \leq \lambda \, a_n$

$a_1 \leq \lambda \, a_0$

$a_2 \leq \lambda \, a_1 \leq a_0 \cdot \lambda^2$

$a_3 \leq \lambda \, a_2 \leq a_0 \, \lambda^3$

...

$a_n \leq \lambda \, a_{n-1} \leq a_0 \, \lambda^n$

Il termine generale della serie è maggiorato dalla quantità $a_0 \cdot \lambda^n$, che è anch'esso una serie geometrica: $a_0 + a_0\lambda + a_0\lambda^2 \dots$ ovvero $a_0 \cdot (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots)$ che è convergente, allora anche la serie in esame è convergente.

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ posso dire subito che la serie non converge e dunque diverge positivamente.

Questo perché

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Longleftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$ vale a dire la successione dei termini è crescente e non può tendere a 0. Viene meno la condizione necessaria affinché una serie sia convergente, dunque la serie non può convergere quindi diverge def: DATA UNA SERIE A TERMINI POSITIVI, SE IL RAPPORTO TRA CIASCUN TERMINE E IL TERMINE PRECEDENTE SI MANTIENE MINORE O UGUALE AD UNA COSTANTE MINORE DI 1, ALLORA LA SERIE È CONVERGENTE.

Esempio: $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

nasce dalla serie esponenziale

Se $x \geq 0$ questa è una serie a termini positivi, ma, al pari della serie geometrica, se $x < 0$ questa è una serie a termini alternativamente positivi e negativi

Consideriamo il caso $x \geq 0$: la somma parziale è un polinomio, di grado n e applichiamo il criterio del rapporto.

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0$$

il rapporto converge a 0, dunque la serie esponenziale è convergente per $x \geq 0$

Dimostreremo che la serie esponenziale è convergente per ogni x e che la somma di questa serie è e^x.

applicando l'assoluta convergenza

Da notare che $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$

ASSOLUTA CONVERGENZA

$$\sum_{k\geq 0} a_k \qquad \sum_{k\geq 0} |a_k|$$

questa serie, a termini positivi, posso applicare il criterio del rapporto e il criterio del confronto.

SE LA SERIE CON I VALORI ASSOLUTI È CONVERGENTE, ALLORA È CONVERGENTE ANCHE LA SERIE FATTA CON I TERMINI COSÌ COME SONO. CIOÈ L'ASSOLUTA CONVERGENZA IMPLICA LA CONVERGENZA.

CRITERIO DELLA RADICE

$\sum_{k\geq 0} a_k$ $\quad \sqrt[n]{a_n}$ se questa successione si mantiene minore o uguale di una costante minore di 1 allora è convergente

$\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda < 1$ conv.

def: DATA UNA SERIE A TERMINI POSITIVI, SE LA RADICE n-esima DEL TERMINE n-esimo SI MANTIENE MINORE O UGUALE AD UNA COSTANTE MINORE DI 1 ALLORA LA SERIE È CONVERGENTE.

SERIE A SEGNI ALTERNI

def.: DATA UNA SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO, SE LA SUCCESSIONE DEI VALORI ASSOLUTI DEI TERMINI È MONOTÒNA DECRESCENTE E TENDE A 0, ALLORA LA SERIE È CONVERGENTE

$a_n > 0$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots$

sommo e sottraggo i termini della successione a termini positivi

$S_0 = a_0$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, di questa serie a segni alterni, l'esempio più semplice è la serie armonica:

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ Per queste serie il criterio esposto è dovuto a Leibniz.

$a_n = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

simbolo

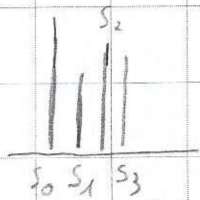
$|a_n| = \frac{1}{k}$ che è monotona decrescente e tende a $0 \Rightarrow$ la serie è convergente

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 - a_1 < S_0$

$S_2 = S_1 + a_2 = a_0 - a_1 + a_2 = a_0 - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\text{di segno } +}$

$S_3 =$



due classi di numeri reali separate e contigue, la somma della serie è elemento di separazione

Cioè $S_0 > S_1 > S_2$ ...

$S_1 < S_3 < S_5$ stima per difetto | successione somme parziali indici dispari è monotona crescente

$S_0 > S_2 > S_4$ stima per eccesso

successione monotona che tende a 0.

Facendo la differenza $\underbrace{S_{2n}}_{\text{Generica somma di indice pari}} - S_{2n-1} = a_{2n} \searrow 0$

La somma di questa serie a segni alterni è $\ln_{\text{base } e} 2$.

LEZ. 3 POLINOMI DI TAYLOR I

Riepilogo funzioni polinomiali
Approssimazione di funzioni: simboli di Landau
Funzioni approssimabili: polinomio di Taylor

LE FUNZIONI POLINOMIALI

. La derivata di una funzione polinomiale è una funzione polinomiale.
. Le primitive di una funzione polinomiale sono funzioni polinomiali

Sono facili da calcolare: il valore in un punto si ottiene per addizioni e moltiplicazioni.

Il polinomio di grado n assume un valore in un determinato punto calcolabile in una determinata maniera eseguendo n moltiplicazioni e n addizioni utilizzando lo schema Ruffini-Conrad.

È possibile utilizzare polinomi per approssimare funzioni che polinomiali non sono.

La lezione è su come APPROSSIMARE LOCALMENTE, IN UN CERTO PUNTO, UNA FUNZIONE CHE NON È POLINOMIALE, MEDIANTE UNA FUNZIONE POLINOMIALE.

UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE SI DICE PER UN INSIEME DI PUNTI SE QUALUNQUE SUO INTORNO CONTIENE SEMPRE ALMENO UN PUNTO DELL'INSIEME DIVERSO DAL PUNTO.

Siano f e g due funzioni e x_0 un punto di accumulazione delle funzioni
↳ o $+\infty$, o $-\infty$, a seconda dei casi

$$f, g : A \to \mathbb{R} \qquad x_0, \ +\infty, \ -\infty$$

QUANDO DICIAMO CHE $f(x)$ è uguale a $O(g(x))$

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$$

intendiamo $|f(x)| \leq C\,|g(x)|$ per tutti gli x prossimi a x_0
↳ si può maggiorare con una costante col $|f(x)|$

Se suppongo che la g si mantenga $\neq 0$ almeno per tutti gli x abbastanza prossimi a x_0 questo è come dire che

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)| \iff \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C$$

↳ il valore non è in realtà di interesse, C è una costante che maggiora il rapporto

Se siamo in grado di determinare il limite del rapporto tra $f(x)$ e $g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$$ allora è certo che $f(x) = O(g(x))$ perché in base alla def di limite il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ per $x \to x_0$ si mantiene tra $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$ e il valore assoluto del rapporto è limitato superiormente da una costante $C = |L| + \varepsilon$

Questa relazione sussiste ogni volta che il limite è 1; abbiamo visto un caso notevole = UN LIMITE NOTEVOLE È UN LIMITE CHE TROVA UTILIZZAZIONI SUCCESSIVE IN CALCOLI SEGUENTI.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$ ↳ SCRITTURA IN NOTAZIONE SPECIALE $f(x) \underset{\text{equivalente}}{\sim} g(x)$ e, nel nostro caso $\sin(x) \sim x,\ x \to 0$

essenziale per calcolare la derivata della funzione seno e coseno

Dire che $f(x) = O(1),\ x \to x_0$

vuol dire che in un intorno di x_0 la funzione divisa per 1, in valore assoluto, si mantiene limitata.

Ad es $\sin x = O(1),\ x \to +\infty$ anche per $x \to -\infty$ (e ogni altro valore)

↳ perché $\sin x$ non supera 1 e quindi è una funzione limitata

C'è un altro caso importante che merita una notazione particolare

quando $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ in cui è evidente che $f(x) = O(g(x))$

o piccolo

Quando accade questo si dice che $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$

(nel rapporto se f e g tendono entrambe a 0, f tende a 0 più velocemente; se f e g tendono a ∞, g tende a ∞ più velocemente)

ESEMPIO:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

quindi $1-\cos x = o(x)$, $x \to 0$

Def.: SE f E g SONO DUE FUNZIONI DEFINITE IN UN INSIEME A DI CUI a È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE, LA NOTAZIONE $f = o(g)$ SIGNIFICA CHE IL RAPPORTO f/g TENDE A 0 PER x CHE TENDE AD a, LA NOTAZIONE $f = O(g)$ SIGNIFICA CHE IL RAPPORTO f/g SI MANTIENE LIMITATO IN UN INTORNO DEL PUNTO a.

ESEMPIO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\ln}{\log} x}{x} = 0 \iff \log x = o(x),\ x \to +\infty$$

(dalla regola de l'Hopital)

ESEMPIO

$$\lim_{\substack{x\to +\infty \\ 0<\alpha<1}} \frac{\log x}{x^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\text{derivata del logaritmo}}{1}}{x \cdot \underset{\text{derivata di } x^\alpha}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0$$

quindi $\log x$ cresce più lentamente di x^α, per $0<\alpha<1$, cioè α piccolo. (e ovviamente per $\alpha \geq 1$)

ESEMPIO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,\ \forall n$$

(applicando n volte la regola di l'Hopital, al numeratore ho sempre e^x, al denominatore $n!$, cioè una costante)

quindi è falso scrivere $e^x = O(x^n)$, $x \to +\infty$

APPROSSIMAZIONE DI UNA FUNZIONE

Intervallo di definizione di f

$$f: \underline{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

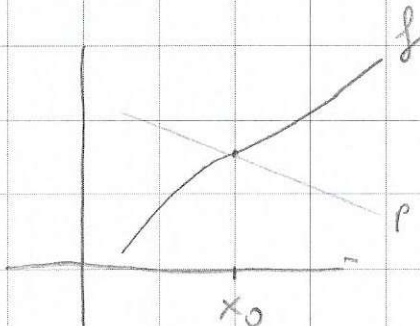
a valori reali, derivabile nel punto x_0

x_0 è un punto dell'intervallo

e cerchiamo di approssimare la funzione f localmente, in prossimità di x_0, mediante una funzione "affine", cioè un polinomio di grado ≤ 1.

$$f(x) \qquad p_1(x) = \underset{\text{pendenza della retta}}{m}x + \underset{\text{ordinata all'origine}}{q}$$

fra tutte le funzioni p quale approssima meglio f in prossimità di x_0?



Una condizione è che la retta rappresentata da p_1 passi per il punto $x_0, f(x_0)$ perché se così non fosse, la differenza $f(x) - p_1(x)$ non sarebbe nulla, nell'intorno non tenderebbe a $\emptyset$. Quindi una condizione è:

$p_1(x_0) = f(x_0)$

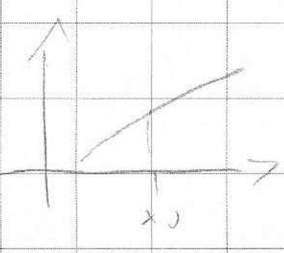
ovvero $p_1(x_0) = m x_0 + q = f(x_0)$

avendo $p(x) = mx + q$ e, sottraendo membro a membro

$p_1(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$ il parametro q scompare

da cui $p_1(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ e, qualunque sia m, la differenza

$$\underbrace{f(x) - p_1(x)}_{\text{perché tende a } \emptyset \text{ per } x \to x_0} = o(1), \quad x \to x_0 \quad (\forall m)$$



N.B.: queste argomentazioni sono "rivisitazione" del concetto di derivata, visto in iter logico ≠

Nel fascio di rette che passano per il punto x_0 ce n'è una che approssima meglio l'andamento della f rispetto alle altre rette.

Potrebbe essere possibile scegliere m, un ulteriore grado di libertà rimasto, in modo che la differenza $f - p_1$ non solo sia $o(1)$, cioè un infinitesimo, ma anche che sia $o(x-x_0)$, cioè una funzione che tende a 0 ma più velocemente di come tende a 0 l'incremento della variabile indipendente.

$$f(x) - p_1(x) = o(x-x_0), \quad x \to x_0$$

Vediamo cosa significa questa imposizione:

$$\Big[\underbrace{f(x) - f(x_0) - m(x-x_0)}_{-\,p_1(x)}\Big] / (x-x_0) =$$

questa differenza è l'errore che commetto quando al posto di f scrivo p_1 e vorrei che andasse a zero più velocemente di $x-x_0$, quindi dividendo per $x-x_0$ viene che il rapporto

$$= \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} - m \underbrace{\xrightarrow[x \to 0]{}}\ 0$$

Rapporto incrementale della funzione f

la differenza tende a 0 per $x \to 0$ quando il rapporto incrementale tende ad un limite finito, cioè la funzione sia derivabile e come m vado a prendere proprio la derivata nel punto x_0.

Quindi è possibile approssimare f con un particolare polinomio p_1 tale che la differenza $f - p_1$ è un $o(x-x_0)$ se e solo se la f è derivabile nel punto x_0 stesso e in questo caso, il particolare polinomio p_1 che realizza tutto ~~ciò~~ si scrive scegliendo come m proprio la derivata nel punto x_0, ovvero $m = f'(x_0)$, quindi abbiamo

$$p_1(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{+\, m(x-x_0)}$$

Possiamo dunque leggere la derivabilità in questo modo: una funzione è derivabile in un punto se è possibile approssimarla bene in prossimità di quel punto con una funzione polinomiale affine di grado minore o uguale a 1, non escludendo $p_1 = 0$.

Approssimare bene significa dire che la differenza $f - p_1$ è un $o(x-x_0)$.

def.: LA FUNZIONE f È DERIVABILE IN UN ASSEGNATO PUNTO DEL SUO DOMINIO SE E SOLO SE È POSSIBILE APPROSSIMARLA, IN UN INTORNO DELLO STESSO PUNTO, MEDIANTE UNA FUNZIONE AFFINE p IN MODO TALE CHE

$$f(x) - p(x) = o(x-x_0), \quad x \to x_0$$

a patto che la f sia derivabile

Abbiamo visto che fra tutte le funzioni affini ce n'è una speciale ($p_1(x)$, vedi sopra), che sarà indicata con un simbolo particolare:

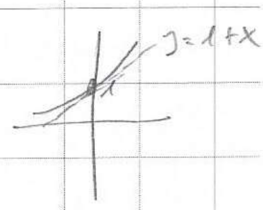
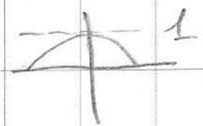
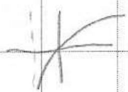
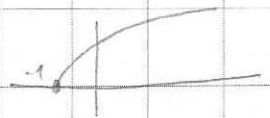
$$T_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

per motivi storici, B. Taylor e C. MacLaurin

(quando $x_0 = 0$, secondo gli autori)

TABELLA

$f(x)$	$T_1(x)$	$x_0 = 0$
e^x	$1+x$	→ equivale a dire che l'eq. della tangente si scrive $y = 1+x$
$\sin x$	x	
$\cos x$	1	(il polinomio di Taylor è di grado 0)
$\ln(1+x)$	x	
$\arctan x$	x	
$\sqrt{x+1}$	$1+\frac{x}{2}$	$d(1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ → e per $x_0=0$ vale $\frac{1}{2}$
$\sqrt[n]{x+1}$	$1+\frac{x}{n}$	
$\frac{1}{1-x}$	$1+x$	$\left(\left(d\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}\right)\right)$

traslazione lungo x; fatto che x $X=0$ la f non è definita

somma della serie geometrica di elemento iniziale 1 e ragione x, sempre che $|x|<1$, cioè $-1<x<1$

Abbiamo detto che

$$f(x) - T_1(x) = o(x-x_0)^2$$

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta f = \text{la variazione di } f \text{ tra } x-x_0} - f'(x_0)\cdot(x-x_0) = o(x-x_0)^2$$

$$\Delta f := f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\overbrace{(x-x_0)}^{\Delta x}}_{\text{primo termine lineare nell'incremento}} + o(\Delta x)^2, \quad \Delta x \to 0$$

La variazione che la funzione subisce si può approssimare bene con questo prodotto nel senso che l'errore commesso è qualcosa di trascurabile essendo un $o(\Delta x)^2$.

Il prodotto, che è una buona approssimazione della variazione che la funzione subisce, è importante, viene preso in considerazione e si chiama il differenziale della funzione f e si indica con df; se si vuole specificare che esso è calcolato nel punto x_0 si scrive df_{x_0}, con x_0 al piede. Formalizzando

$$df_{x_0} : h \underset{\text{associa}}{\longmapsto} f'(x_0) \cdot h$$

def: IL DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE f IN UN ASSEGNATO PUNTO x_0 È LA FUNZIONE LINEARE

$$df_{x_0} : h \to f'(x_0) \cdot h$$

I polinomi visti finora, per approssimare una funzione erano tutti di primo grado, ma è possibile usarne anche di grado superiore. Ad esempio di secondo grado:

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$$

Ed è lecito supporre che si possa trovare un polinomio tale che:

$$f(x) - p_2(x) = o[(x-x_0)^2], \quad x \to x_0$$

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - a_2(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} \to 0$$

La prima condizione è $a_0 = f(x_0)$ (come per il polinomio p_1) ordinariamente

Se $a_0 = f(x_0)$ il numeratore è infinitesimo e allora per calcolare questo limite potrei applicare la regola de L'Hôpital.

$$\frac{\boxed{f'(x) - a_1} - \overbrace{2a_2(x-x_0)}^{\text{questo prodotto tende a } 0}}{\boxed{2(x-x_0)}_{\text{tende a } 0}}$$

affinché tenda a 0 anche questo (quoziente) la seconda condizione è

$$a_1 = f'(x_0)$$

I primi due addendi di p_2 sono il polinomio di Taylor $T_1(x)$: $p_2(x) = \overbrace{a_0 + a_1(x-x_0)}^{T_1(x)} + a_2(x-x_0)^2$

Facendo ora una seconda derivata, ovvero riapplicando la regola di L'Hôpital abbiamo:

$$\frac{f''(x) - 2a_2}{2} \to 0$$ per cui la condizione è:

$$2a_2 = f''(x)$$

La scelta corretta, dunque per costruire il polinomio è

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(x).$$

Il polinomio di Taylor di 2° grado, il $T_2(x)$ della prossima lezione, è fatto nella seguente maniera:

$$f(x_0) + f_1(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Se f è una funzione n volte derivabile nell'origine, l'unico polinomio di grado minore o uguale ad n che nell'origine ha le stesse derivate fino all'ordine n si scrive

$$T_n(x) = \sum \frac{\quad}{\quad}$$

LEZ. 4: POLINOMI DI TAYLOR II

È data una funzione f definita in un intervallo I, abbiamo un punto x_0 di questo intervallo, la f è derivabile nel punto x_0

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Il problema posto è approssimare la funzione f nel modo migliore possibile in prossimità di x_0 mediante funzioni affini, ovvero polinomi di grado ≤ 1. Il problema era fare in modo che la differenza andasse a 0 per $x \to 0$ e più velocemente della differenza $x - x_0$, ovvero un $o(x-x_0)$ per $x \to 0$

[1] $f(x) - p_1(x) = o(x-x_0),\ x \to 0$

La notazione sopra equivale a dire che il rapporto

$$\frac{f(x) - p_1(x)}{x - x_0}$$ tende a 0

Questo problema ammette una ed una sola soluzione se e solo se la funzione f è derivabile nel punto x_0 e questo particolare polinomio p_1 che approssima f nel modo specificato è stato chiamato $T_1(x)$ e la forma è:

$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ polinomio di Taylor

La retta di equazione $y = T_1(x)$ è la retta tangente al grafico della funzione.

Andando a sostituire $T_1(x)$ in $P_1(x)$ in [1] otteniamo

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\text{LA VARIAZIONE CHE LA FUNZIONE SUBISCE NEL PASSAGGIO DA } x_0 \text{ A } x} - f'(x_0)(\overset{\Delta x}{\overset{\shortparallel}{x-x_0}}) = o(x-x_0)$$

LA VARIAZIONE CHE LA FUNZIONE SUBISCE NEL PASSAGGIO DA x_0 A X, DETTA:

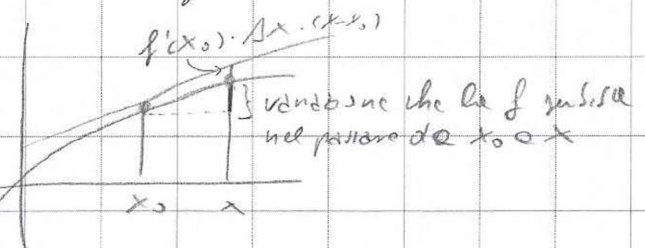
$$\Delta f := f(x)-f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\cdot\Delta x}_{O(\Delta x)} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{quantità } o(\Delta x)\text{, trascurabile rispetto a } \Delta x}$$

Il Δf viene spezzato in due addendi di cui il primo sarà $O(\Delta x)$ ed è chiaro che se lo prendo in valore assoluto lo posso maggiorare col valore assoluto della derivata prima per il valore assoluto di Δx.

La variazione che la f subisce nel passaggio da x_0 a x si spezza in due addendi, il primo dei quali è un $O(\Delta x)$ e il secondo è $o(\Delta x)$ quindi in un certo senso trascurabile rispetto al primo.

Il primo addendo è quello che si chiama il differenziale della funzione nel punto x_0

Geometricamente sostituire al Δf il suo differenziale vuol dire prendere come prima approssimazione



di questa variazione subita dall'ordinata sulla curva la variazione che subisce l'ordinata sulla tangente.
E $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare, la pendenza della retta tangente a f in x_0.

Il passo successivo è stato quello di considerare, per l'approssimazione, polinomi di grado 2, o inferiore.

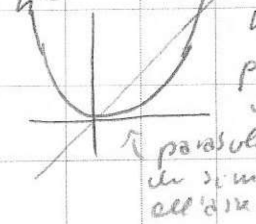
$$p_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$$

se $a_2 \neq 0$ la rappresentazione geometrica di p_2 è una parabola;
se $a_2 = 0$ la rappresentazione è una retta e ricadiamo nella classe precedente delle funzioni affini, che hanno come grafici delle rette non parallele all'asse delle ordinate

E analogamente si vuole che la differenza $f(x) - p_2(x)$ andasse a 0 per $x \to 0$

$$f(x) - p_2(x) = \underbrace{r_2(x)}_{\text{per definizione}} = o\left[(x-x_0)^2\right], \quad x \to x_0$$

$\Delta x = x - x_0 = h$
↳ tende a 0



h^2 va a 0 più velocemente di h

↑ parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate

Il polinomio p_2 esiste, come visto nella lezione precedente, ed esiste a patto che la f sia derivabile due volte, nel punto x_0.
Questo polinomio, T_2 è così fatto:

polinomio che approssima al meglio la f nel punto x_0, nel senso che la differenza $f - T_2$ non solo è $o(x-x_0)$, ma è $o[(x-x_0)^2]$

$$T_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{n.b.: } T_1(x)} + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2$$

La parabola tocca il grafico nel punto x_0 della f, qui non riportato.

NUOVA TABELLA CON IL POLINOMIO DI TAYLOR T_2:

$f(x)$	$T_2(x)$	$x_0 = 0$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2$ ↳ le somme parziali della serie geometrica la cui somma per $-1<x<1$ è proprio $\frac{1}{1-x}$	
$\sin x$	x (= T_1, non c'è miglioramento)	
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$	
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2}$	
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$	

$x_0 = 0$ ⇒ polinomi di McLaurin, secondo gli autori

Considerazione geometrica al minuto 12'50":
T_1 è una retta che geometricamente ha in "comune due punti con f", la seconda T_2 è una parabola che ha "3 punti in comune" con f.

PARABOLA OSCULATRICE

Si nota che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari.
La derivata di una funzione dispari è una funzione pari.

Le funzioni dispari nell'origine valgono 0.

Nelle funzioni dispari si annullano nell'origine le derivate di ordine pari

Nelle funzioni pari si annullano nell'origine le derivate di ordine dispari.

Nei polinomi di Taylor di funzioni pari ho potenze pari, quindi sono funzioni pari.

Nei polinomi di Taylor di funzioni dispari ho potenze dispari e sono funzioni dispari.

VISTI I POLINOMI DI GRADO ≤ 2, PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE QUELLI DI GRADO $\leq n$: p_n TALI CHE LA DIFFERENZA SIA UN $o[(x-x_0)^n]$

$r_n(x) := f(x) - p_n(x) = o[(x-x_0)^n], \quad x \to x_0$

Resto, L'ERRORE CHE SI COMMETTE QUANDO AL POSTO DI f SI SCRIVE p_n

DALLE PRECEDENTI ARGOMENTAZIONI, PER PROCEDERE CON QUESTA, SI NOTA CHE:

$f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$,

quindi il polinomio T_2 è stato scelto affinché siano vere queste tre uguaglianze. È proprio imponendo queste tre relazioni di uguaglianza che è stato possibile ottenere il risultato desiderato, cioè che $f - T_2 = o[(x-x_0)^2]$.

Riscrivendo separatamente i tre termini che costituiscono T_2, abbiamo:

	D^0 (derivata di ordine 0)	D'	D'' (per $x=x_0$!)
$f(x_0)$	$f(x_0)$ (è una costante)	0	0
$f'(x_0)(x-x_0)$	0	$f'(x_0)$	0
$f''(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2}$	0	0	$f''(x_0)$

(N.B. derivare un polinomio un numero di volte maggiore del suo grado, dà come risultato 0)

A vedere come vanno le cose sembra che T_2 si ottiene da T_1 aggiungendo un termine quadratico.

I polinomi di Taylor possono essere generati in maniera ricorsiva:

$$T_0(x) = f(x_0)$$

qualcosa che si annulli, con tutte le derivate di ordine n-1 nel punto x_0: $(x-x_0)^n$ e che la derivata n-esima valga $f^n(x_0)$ e a denominatore una costante tale che la derivata del blocco faccia 1, calcolato per $x=x_0$, ovvero n!

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Quindi abbiamo che:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k =$$

↳ derivata k-esima nel punto x_0

Per esteso il polinomio di Taylor è:

$$T_n(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots}_{} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Se mi arresto al termine precedente, cioè quello che contiene la derivata $n-1$ esima ho il polinomio $T_{n-1}(x)$.

In altra notazione abbiamo:

$$D^k T_n(x_0) = D^k f(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Dimostrazione della validità del risultato:

$$\frac{f(x) - T_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} \longrightarrow 0$$

$$\frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \longrightarrow 0 \quad \text{se}$$

è una costante.

$$\frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} \longrightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\overset{H}{=}$$

$$\underbrace{\frac{f'(x) - T'_{n-1}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}}_{\text{limite del tipo } 0/0} \overset{H}{=} \underbrace{\frac{f''(x) - T''_{n-1}(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}}_{\text{limite del tipo } 0/0}$$

e dopo aver applicato $n-1$ volte questa regola ho:

perché le derivate f' e T' coincidono per $x = x_0$

$$\frac{\boxed{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}}{n!\,\boxed{(x-x_0)}} \longrightarrow \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)$$

È il rapporto incrementale della derivata di ordine $n-1$, al limite è proprio $f^{(n)}(x_0)$

Quindi il polinomio T_n approssima la funzione f con un errore che è un $o[(x-x_0)^n]$.

LEZ 5 : SERIE DI TAYLOR I

41'59"

Abbiamo visto come fare ad approssimare una funzione in un intorno del punto di un suo dominio mediante un polinomio di grado n in maniera da rendere la differenza fra la funzione di partenza e il polinomio stesso un infinitesimo di ordine superiore a n.

$$\underbrace{\overbrace{f(x) - T_n(x)}^{"r_n"}}_{\text{la differenza tende a 0 quando } x \to x_0} = o\left[(x-x_0)^n\right], \quad x \to x_0$$

Il polinomio è:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

I legami che intercorrono tra T_n e la funzione f sono:

$$D^k\, T_n(x_0) = D^k\, f(x_0), \quad k = 0, \dots, n$$ (assieme n+1 condizioni di uguaglianze)

queste n+1 uguaglianze fanno sì che si ottenga questo risultato.

Si può scrivere

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x), \quad r_n(x) = o\left[(x-x_0)^n\right], \quad x \to x_0$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

la derivata di ordine 1 è: $+(1-x)^{-2}\big|_{x=0} = 1$

2 : $+2(1-x)^{-3}\big|_{x=0} = 2$

3 : $3!\,(1-x)^{-4}\big|_{x=0} = 3!$

4 : $4!\,(1-x)^{-5}\big|_{x=0} = 4!$

...

n : $n!\,(1-x)^{-n-1}\big|_{x=0} = n!$

I coefficienti del polinomio di Taylor sono le derivata nesima diviso $n!$, ma la derivata nesima vale, in questo caso $n!$ e quindi $n!/n! = 1$, quindi abbiamo:

$$T_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \rightarrow \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Cioè la somma parziale nesima della serie geometrica $\frac{1}{1-x}$ converge a $\frac{1}{1-x}$ se e solo se $|x|<1$

Abbiamo la cosiddetta sviluppabilità in serie di Taylor. Dire che questa funzione sviluppabile in serie di Taylor non vuol dire semplicemente che la serie di Taylor converge per certi x, ma vuol dire che converge alla funzione f che l'ha generata. Che è ciò che ci interessa poiché vogliamo utilizzare i polinomi di Taylor come approssimazioni della funzione f.

ESAMINANDO LA FUNZIONE SENO, funzione dispari.

$\sin x$

derivata ' : $\cos x$ — per $x=0$ i valori sono 1 ← coefficiente di T_1

'' : $-\sin x$ — 0 — T_2

''' : $-\cos x$ — -1 — T_3

iv : $\sin x$ — 0 — T_4

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

concerne derivate di seno

Esaminiamo la funzione coseno, funzione pari:

$\cos x$, si veda sopra per le derivate.

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Si nota che $T_{2n} = D\, T_{2n+1}$ $\left(D \frac{x^n}{n!} = \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right)$

Esaminiamo la funzione esponenziale

e^x

Il polinomio di Taylor della funzione esponenziale è:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

ottenendo la somma parziale n-esima della serie che già avevamo chiamato serie esponenziale (senza una vera giustificazione):

$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ = serie esponenziale

Vedremo, scelto x, cosa accade per $n \to \infty$, vedremo se la serie converge, e a che cosa. Concludendo che converge proprio a e^x, cioè $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \overset{?}{=} e^x$, lo sarà.

Esaminiamo la funzione $\ln(1+x)$

$\ln(1+x)$

D' : $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$
$1+x = 1-(-x)$

polinomio di Taylor è

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-t} \to 1+t+t^2+\dots+t^{n-1}$

$t=-x$ $\quad \underbrace{1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}}$

questo è il polinomio di grado $n-1$ non della funzione, ma della sua derivata prima. Se integro questo polinomio tra 0 e x trovo T_n, cioè serve la primitiva di questo polinomio nulla nell'origine

Ottengo il polinomio

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$

$\boxed{\text{la primitiva di } x^{n-1} \text{ che si annulla per } x=0}$

NB.:

la $D^n(\ln(1+x)) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot x^n}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n$

Questa è una serie che se a x dò un valore positivo è a segni alterni.

Se $x \leq 1$ ($0 \leq x \leq 1$) è una successione monotona in senso lato, al denominatore è crescente, allora la successione fatta con i termini presi in valore assoluto di questa serie è monotona decrescente e tende a 0 perché c'è una n al denominatore.

Il termine $n$esimo preso in valore assoluto di $(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ se x non supera 1, lo maggioro con $\frac{1}{n}$ che chiaramente tende a 0.

Ricadiamo nell'ipotesi del teorema di Leibniz, per cui per le serie di segno alterno essa dice che se la successione è fatta con ~~segni~~ valori assoluti dei termini ed è monotona e tende a 0 allora la serie converge

RIPRENDIAMO IL DISCORSO GENERALE

FORMULA DI TAYLOR

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = o[(x-x_0)^n], \; x \to x_0$$

se vogliamo dimostrare che questa successione tende a f dobbiamo dimostrare che R_n tende a 0. — che è la successione delle somme parziali della serie di Taylor

Dire che la f è sviluppabile in serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \underset{\text{è equivalente}}{\iff} \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

per x fissato ed n variabile

Questa informazione, utile che la costruzione dei polinomi T_n, non basta più perché il punto di vista in cui ci siamo posti è completamente differente.

Non ci domandiamo più cosa fa R_n, cioè la differenza $f - T_n$ per n fissato e x variabile che tende a x_0, ma scegliamo un punto x distinto da x_0 (perché in x_0 non succede nulla di interessante, i polinomi T_n valgono tutti $f(x_0)$, quindi il limite è $f(x_0)$, di scarso interesse) e ci chiediamo se è vero che in quel certo x, $T_n \to f$, ovvero $R_n(x)$ tende a 0.

Dobbiamo avere una qualche informazione* di tipo quantitativo che ci aiuti a concludere che $R_n(x)$, per x fissato tende a 0 quando n tende a $+\infty$.

La sperimentazione che abbiamo fatto ci induce a pensare che in molti casi questo sia vero.

* La dimostrazione dovuta a Lagrange si avvale di una generalizzazione del valor medio, di cui ricordiamo i passi:

* questa informazione è disponibile e ... 5.5 ...

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Di una funzione f prendo due punti x_0 e x, se la f è continua e derivabile nei punti interni all'intervallo x_0 x allora ~~la differenza~~ il rapporto incrementale si scrive come:

$R_0(x)$, $f(x_0)$ è il polinomio $T_0(x)$, polinomio costante che meglio approssima la f.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$$

x_i è un punto opportuno interno all'intervallo

DIMOSTRAZIONE

Quindi

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\cdot(x-x_0)$$

UN RISULTATO ANALOGO VALE IN GENERALE, CIOÈ PER OGNI n, NEL SENSO CHE LAGRANGE DICE CHE LA FUNZIONE È DERIVABILE n VOLTE NELL'INTERVALLO CHE CI INTERESSA PER IL RESTO R_n POSSIAMO AVERE UNA ESPRESSIONE DEL TIPO:

il punto x_i dipende dal punto x e da n in questo caso

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}(x-x_0)^{n+1}$$

ESPRESSIONE DEL RESTO SECONDO LAGRANGE, È SIMILE AL TERMINE CHE SI DOVREBBE AGGIUNGERE A T_n PER AVERE T_{n+1} CON LA DIFFERENZA CHE LA DERIVATA È CALCOLATA IN UN OPPORTUNO PUNTO ξ E NON IN x_0, CON ξ CHE DIPENDERÀ DA x, x_0 E n, È INTERNO ALL'INTERVALLO.

Esempio

Se voglio approssimare il $\sin x$ con $-(x-\frac{x^3}{3!})$ che è il T_3, ma anche il T_4

$$\sin x = -(x-\frac{x^3}{3!}) = R_4(x) \quad |x| \le \frac{1}{10}$$

che errore commetto? La risposta è data dalla formula di Lagrange:

$x_0 = 0$; $n = 4$

$$R_4(x) = \frac{\cos \xi}{5!}\cdot x^5$$

quattro

$5! = 120$

derivata quinta di sin

$$|R_4(x)| \le \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{10^5} \approx 8{,}3\cdot 10^{-8}$$

che è un errore molto piccolo, quindi la sostituzione è del tutto accettabile

LEZ. 6 SERIE DI TAYLOR II

Il risultato finale della precedente lezione è stato una ESPRESSIONE DEL RESTO DELLA FORMULA DI TAYLOR, che va sotto il nome di RESTO SECONDO LAGRANGE e da questa espressione del resto ci proponiamo di trarre delle conseguenze di tipo quantitativo, cioè ci proponiamo di concludere che, almeno in certi casi, la successione dei polinomi di Taylor, dunque la SERIE DI TAYLOR, per certi x distinti dal punto x_0 converge alla $f(x)$ che l'ha generata.

Si intende dedurre dalla forma del resto la sviluppabilità della funzione f in un assegnato punto x.

def: SE $f: I \to \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE $n+1$ VOLTE DERIVABILE SULL'INTERVALLO I E $x_0 \in I$, ALLORA PER OGNI $x \in I$ SI PUÒ TROVARE UN PUNTO ξ, INTERNO ALL'INTERVALLO AVENTE COME ESTREMI I DUE PUNTI SCELTI, PER CUI

ξ = xi

IL TEOREMA NE AFFERMA L'ESISTE

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x) = \underbrace{\frac{(D^{n+1} f)(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Termine}}$$

Resto, errore di approssimazione

SI NOTI CHE UNA VOLTA FISSATO x IL PUNTO ξ ESSO DIPENDERÀ ANCHE DA n

IL TERMINE HA UNA QUALCHE SOMIGLIANZA COL TERMINE CHE OCCORREREBBE ADDIZIONARE AL POLINOMIO DI TAYLOR T_n PER AVERE IL POLINOMIO DI TAYLOR T_{n+1}. LA SOMIGLIANZA STA NELLA STRUTTURA DI QUESTO TERMINE MA LA DIFFERENZA CONSISTE NEL FATTO CHE IL TERMINE CHE DOVREI ADDIZIONARE A T_n PER AVERE T_{n+1} SAREBBE FORMALMENTE ANALOGO A QUESTO SALVO CHE LA DERIVATA DOVREBBE ESSERE CALCOLATA NEL PUNTO x_0 E NON NEL PUNTO ξ, COMPRESO FRA x_0 E x.

PER $n=0$ QUESTO TEOREMA È IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DI LAGRANGE

Visto che

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

dire che per un determinato x $T_n \to f$ quando $n \to \infty$ è la stessa cosa che dire $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, ovvero

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x) \iff \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

cominciamo a vedere la sviluppabilità per

LE FUNZIONI CIRCOLARI (seno e coseno)

Ne abbiamo visto i polinomi di Taylor fino ad un certo ordine, 1=2, 3=4, 5=6, 7=8 arrivando a vederne la sovrapposizione apparentemente equivalente per intervalli sempre maggiori. In realtà è proprio così; per $x_0=0$, per la funzione seno, abbiamo

$$r_n(x) = \frac{\boxed{(D^{n+1}\sin)(\xi)}^{\leq 1}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$| \quad | \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$ per ogni fissato $x \Rightarrow \sin x$ è sviluppabile e abbiamo che la serie di Taylor per la funzione seno è:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{termine generale}} + \dots$$

ed un risultato analogo varrà per la funzione coseno, che è la derivata del seno, quindi la serie di Taylor del coseno corrisponde alla derivata della serie di Taylor del coseno.

La serie di Taylor per la funzione coseno è:

$$\cos x \underset{\text{si può ottenere come somma della serie}}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \underbrace{\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{Termine generale}} + \dots$$

Dimostriamo ora che la successione $\frac{x^n}{n!}$ tende a 0 per ogni fissato x.

$$\frac{x^n}{n!}$$

supp. $x>0$, $0<x<1 \to$ per $x=1 \Rightarrow$ la successione diventa $\frac{1}{n!}$, che è monotona decrescente e tende a 0 per $x=1 \Rightarrow$ la successione diventa $\frac{1}{n!}$, che è monotona decrescente e tende a 0.

per $x<1 \Rightarrow$ le potenze di un ~~nu~~ numero compreso fra 0 e 1 vanno diminuendo e tendono a 0; quindi la successione è monotona decrescente e tende a 0.

per $x>1 \Rightarrow$ la successione al numeratore non tende più a 0, dati. Essa tende a $+\infty$, diverge positivamente, e quella al denominatore pure. Quindi potremmo dire di essere in presenza di un limite $\frac{\infty}{\infty}$, ma il denominatore, per ogni fissato x, prevale sul numeratore, nel senso che questa successione, come già anticipato, tende a 0.

VEDIAMO ORA DI METTERE IN EVIDENZA IL LEGAME CHE INTERCORRE FRA IL TERMINE DI INDICE $n+1$ E IL TERMINE DI INDICE n. (Stessa cosa nell'applicazione del criterio del rapporto nelle serie esponenziali, preoccupandosi di evidenziare il rapporto tra i termini di indice $n+1$ e quello di indice n) Abbiamo:

$$\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{x}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{x^n}{n!}}$$

Quindi il termine di indice $n+1$ si ottiene moltiplicando $\frac{x^n}{n!}$ per $\frac{x}{n+1}$.

Del rapporto $\frac{x}{n+1}$, se $n=0$, il rapporto è >1 e si mantiene >1 finché $n+1<x$, ma prima o poi, visto che x sta fermo e $n \to +\infty$, il denominatore supera il numeratore, quindi, per i valori iniziali della successione abbiamo che il fattore $\frac{x}{n+1}$ è >1 quindi il termine $n+1$esimo è più grande del termine $n$esimo. La successione inizia salendo.

Ma quando $n+1>x$ la successione diventa monotona decrescente per la ragione

che, per avere il termine x di indice n+1 prendo il termine di indice n e lo moltiplico per una quantità minore di 1.
Quindi la successione comincia in salita ma ad un certo punto diventa monotona decrescente, definitivamente monotona decrescente come $\sqrt[n]{n}$.

Sia L il limite a cui tende la successione $\frac{x^n}{n!}$, allora anche la successione letta al passo dopo tende a L:

$$\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\downarrow \; L} \Longleftarrow \frac{x}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\downarrow \; L}$$

allora $\frac{x}{n+1}$ per ogni x fissato tende a 0.

$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ " $\frac{x}{n+1}$ " $\frac{x^n}{n!}$

tende a 0, $\Rightarrow L = 0 \cdot L \Rightarrow \boxed{L = 0}$

Questo ragionamento, che sfrutta la monotonia, almeno da un certo ~~punto~~ indice in poi, ci convince che la successione

$\frac{x^n}{n!} \to 0$ effettivamente.

C.V.D.

LA FUNZIONE ESPONENZIALE con la serie di Taylor
e^x

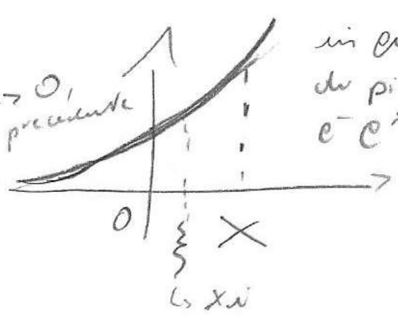
$$r_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

↳ la forma di Lagrange del resto nel caso della funzione esponenziale.
In questo caso sempre positivo.

Supponiamo due casi: $x > 0$

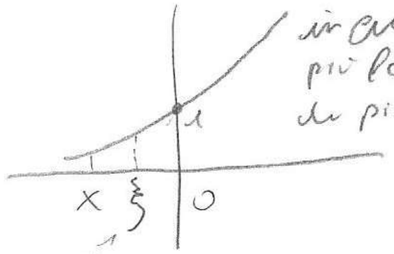
IL RESTO è $\leq \frac{e^x}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$

questa successione $\to 0$, vedi dimostrazione precedente



in questo caso, qualcosa di più grande di e^{ξ} è e^x

$x<0 \Rightarrow x<\xi$



in questo caso, ancora più facile, qualcosa di più grande di e^{ξ} è $e^0=1$

$$r_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

Dunque la funzione e^x è sviluppabile in serie di Taylor.

Ed abbiamo visto come sia giustificabile il termine esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Questa uguaglianza sussiste per $x = 1$, quindi

$$\underbrace{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{\text{questa successione converge molto rapidamente}} + \dots$$

↳ numero di Eulero

Questo modo di ~~...~~ calcolare e, fa dedurre l'irrazionalità di e.

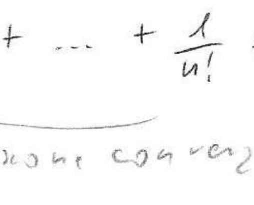
FUNZIONE LOGARITMICA

$\ln(1+x)$ di cui il polinomio di Taylor è $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\dots$

la f è definita per $x>-1$

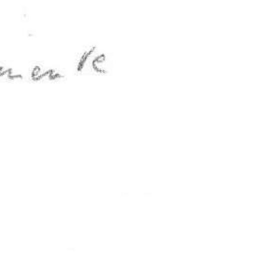
Dimostriamo sviluppabilità

Prendiamo la derivata di $\ln(1+x)$



LA SVILUPPABILITÀ SI HA NELL'INTERVALLO $1<x\le 1$

T_5 visualizzato lo dimostra



$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-(-x)^n+(-x)^n}{1-(-x)} \underset{\text{sia } -x=z}{=} \frac{1-z^n}{1-z} + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{1+x}$$

$= 1+z+z^2+\dots+z^{n-1}$

↳ si parlava prima di

$$= \underbrace{1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1}} + \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{x^n}{1+x}}$$

Questa espressione è la derivata di $\ln(1+x)$, quindi se integro questa espressione ottengo la funzione di partenza.

~~La primitiva della funzione $\ln(1+x)$ che si annulla per $x = 0$ è il $\ln(1+x)$~~ ?

primitiva   primitiva

Ovvero

$$\log(1+x) = \overbrace{x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}}^{\text{che è } T_n} + \overbrace{(-1)^n \cdot \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt}^{= R_n}$$

Abbiamo trovato una espressione integrale del resto della formula di Taylor. Ovvero:

$$\log(1+x) = T_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

Se x è positivo, l'integrale è positivo ed i resti sono alternativamente positivi e negativi.

Prendendo il valore assoluto di $R_n(x)$ ho:

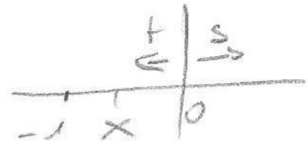
$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \le \int_0^x t^n\, dt \le \frac{\overbrace{x^{n+1}}^{\text{n.b. } -1 < x \le 1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0$$

Quando $x > 1$ $\quad R_n(x) \to \infty$

Per x negativo

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

sia $s = -t \iff t = -s$



t viaggia da 0 a x

s viaggia da 0 a $|x|$, con $x<1$

$$= (-1)^n \int_0^{|x|} \frac{(-1)^n \cdot s^n}{1-s}\,(-ds) =$$

$(-1)^n \cdot (-1)^n = -1^{2n} = 1$ sempre

$$= -\int_0^{|x|} \frac{s^n}{1-s}\,ds$$

questo dal $(-ds)$

l'integrando è positivo

$\downarrow$

il risultato è negativo

Quando x è negativo i resti sono tutti negativi. I polinomi di Taylor, per le x negative, sono più grandi della funzione logaritmica.

$$\int_0^{|x|} \frac{s^n}{1-s}\,ds < \frac{1}{1-|x|} \int_0^{|x|} s^n\,dx \longrightarrow 0$$

In conclusione la serie logaritmica converge per tutti i valori dell'intervallo $-1 < x \leq 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$$

per $-1 < x \leq 1$

Ed in particolare questo è vero per $x = 1$:

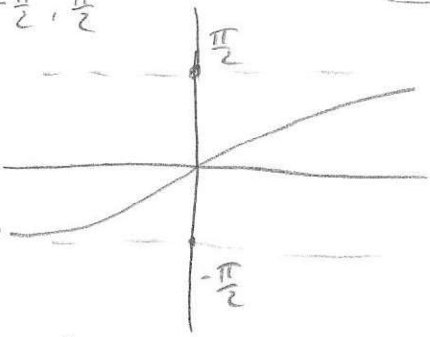
$$\ln 2 \underbrace{=}_{\text{serie armonica}} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

LA FUNZIONE ARCOTANGENTE

P. dispari → serie di Taylor con le sole potenze dispari.

↳ si ottiene invertendo la restrizione della tangente all'intervallo aperto $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$\arctan x$



Anche in questo caso parto dalla sua derivata, pensata come:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

per $|x|<1$

E per ottenere lo sviluppo di Taylor per l'arcotangente, integro il risultato ottenuto, ovvero, per ciascun termine prendo la primitiva nulla nell'origine e ottengo:

in RADIANTI!!

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

applicabile il criterio di Leibniz

SI POTREBBE DIMOSTRARE CHE QUESTA SERIE CONVERGE NEI PUNTI -1 e 1.

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

l'errore qui è $< \frac{1}{7}$

(la serie è $\frac{1}{2n+1}$)

LEZ. 7 APPROSSIMAZIONE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Approssimazione di

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad , \quad \alpha \notin \mathbb{N} \quad , \quad x_0 = 0$$

calcolo delle sue derivate:

$$\alpha (1+x)^{\alpha-1} \Big|_{x=0} = \alpha$$

$$\alpha(\alpha-1) \; (\quad)^{\alpha-2} \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)$$

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \; (\quad)^{\alpha-3} \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

....

$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)$ derivata n esima, per $x=0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \dots \cdot(\alpha-k+1)}{k!}} \cdot x^k$$

quindi la serie di Taylor si ottiene sommando questa quantità.

Ricordando la lezione sul calcolo combinatorio, questo sarebbe il numero di combinazioni di k oggetti a n a n, cioè, il coefficiente binomiale c k n; la serie di Taylor si chiama serie binomiale

Riscrivendo tutto usando $\underline{n}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \dots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n \quad , \; |x| < 1$$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \dots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$

Lo coefficiente binomiale di indice superiore α e indice inferiore n

$\binom{m}{n} = 0, \; n > m$ perché un fattore è 0.

per $\alpha = \frac{1}{2}$

la f sarebbe $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16} x^3 + \dots$

$T_2 = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}}_{\text{trovato un precedenza}}$ $\quad 2 \cdot 4$

$\binom{\alpha}{1} = \alpha \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{\alpha^2-\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}$

$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$ $\quad \alpha = \frac{1}{2}$

$16 \to 2 \cdot 4 \cdot 6$

Dalla scorsa lezione abbiamo visto che

$$e = \underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{S_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\dots}_{} \quad \boxed{\text{per } x = 1}$$

somma parziale della serie n-esima. Se la prendo come approssimazione di e, che errore commetto?

S_n è una stima per difetto e l'errore è la somma dei termini trascurati

$$0 < e - S_n = \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}}_{\text{stima delle quantità!}} + \dots = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right] =$$

scrivo solo n+1, invece di +2, +3 ecc

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}}_{} + \dots\right] =$$

Troviamo una serie geometrica di primo elemento 1 e ragione $\frac{1}{n+1}$, che sappiamo calcolare ed essere

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n\cdot n!}$$

Dunque, per $x=1$ la differenza fra $e - S_n$ è inferiore al risultato ottenuto:

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n\cdot n!}$$

Stesso risultato ottenibile scrivendo la differenza

$$0 \le e^x - T_n(x) \quad \text{(e stimandone l'errore per } x=1\text{)}$$

perché quando x va da 0 a 1, ciascuno dei termini della serie esponenziale è una funzione crescente; il generico termine della somma è $\frac{x^k}{k!}$ e la f assume valore massimo per $x=1$; quindi anche $T_n(x)$ è crescente da 0 a 1

~~Vale la maggiorazione $0 \le x \le 1$~~

$$0 \le e^x - T_n(x) < \frac{1}{n \cdot n!} \qquad 0 \le x \le 1$$ vale questa maggiorazione

DIMOSTRAZIONE CHE e È IRRAZIONALE,

non è esprimibile sotto forma di frazione. Numero razionale è esprimibile come frazione

Per assurdo sia $e = \frac{p}{q}$, cioè un numero razionale

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{p_n}{n!} = \frac{p \cdot n! - q \cdot p_n}{q \cdot n!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$ moltiplico per un multiplo

$$0 < \underbrace{p \cdot n! - q \cdot p_n}_{\text{numero naturale} > 0,\ \ge 1,\ \text{quindi}} < \frac{q}{n}$$ e questo è assurdo

STUDIO DELL'APPROSSIMAZIONE

$n \le x < n+1$ $\quad 0 \le x \le 1$

$\lfloor x \rfloor \le x$

$(1{,}2 \Rightarrow \lfloor 1{,}2 \rfloor = 1)$

$(-1{,}7 \Rightarrow \lfloor -1{,}7 \rfloor = -2)$

il più grande intero che non supera x.

$n \quad x \quad n+1$

$y = x - n \quad 0 \le y < 1$ è una "parte frazionaria", ovvero il complemento a 1

$x = n + y$

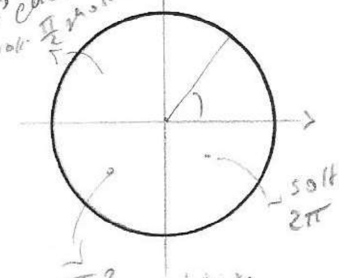
$$e^x = e^n \cdot e^y = (e^1)^n \cdot e^y$$

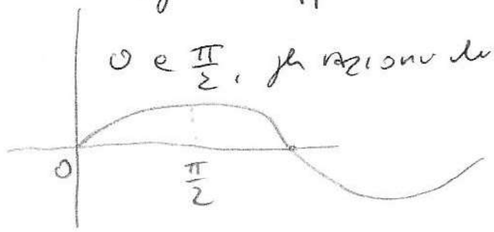
OSSERVAZIONE

$$\boxed{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!}}$$ bassa complessità computazionale

Quello che vale per la funzione esponenziale vale anche per la funzione seno e coseno.

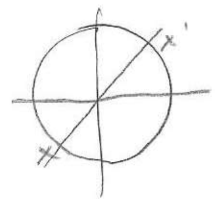
Funzione seno





Sapendo approssimare la funzione seno fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, per ragioni di simmetria, so approssimare anche il resto, per tutta la retta reale

La serie della funzione seno è:



$\sin x = -\sin x'$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

è una serie a termini alterni, quindi

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (x positivo)

è applicabile il criterio di Leibniz, almeno per $0 \leq x \leq 1$ perché i termini di questa serie sono i termini della serie esponenziale di indici dispari. E la successione di questi termini è monotona decrescente per $0 \leq x \leq 1$, per $x > 1$ è monotona per un certo indice in poi, ma non fin dall'inizio. Quindi, poiché $\frac{\pi}{2}$ è > 1, vorrei ricondurmi a $x \leq 1$, con uno escamotage trigonometrico

Se considero

$$x = 3t \iff t := \frac{x}{3}$$

$$\sin x = \sin 3t = 3\sin t - 4(\sin t)^3$$

$2t+t$ per applicare le formule di addizione o duplicazione ed esprimere $\sin 3t$ in funzione di $\sin t$

A questo punto t varia nel seguente modo:

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{6} \quad e \quad \frac{\pi}{6} < 0,6 \text{ quindi possiamo applicare l'approssimazione}$$

$$|\sin t - T_5(t)| \leq \frac{t^7}{7!} = \frac{(0,6)^7}{5040} = 0,0000055 < 0,000006$$

L'errore in modulo non supera... (6 milionesimi)

Se usassi il T_7, l'errore sarebbe maggiorato come $\frac{t^9}{9!}$ e il risultato sarebbe molto più accurato del risultato ottenuto con T_5.

ULTIMA CONSIDERAZIONE SUL logaritmo

$$\left.\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots \end{aligned}\right\} |x|<1 \qquad t = \frac{1+x}{1-x}$$

somme $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$ $\qquad x = \frac{t-1}{t+1}$

SVILUPPABILE PER $-1 \leq x < 1$, OVVERO $|x| < 1$. $\qquad t = 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

LEZ. 8 STRUTTURA di $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ SIGNIFICA LE N-uple DI NUMERI REALI

ARGOMENTI: PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^n$
DISTANZA IN $\mathbb{R}^n$
TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$

Vettore colonna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i \in \mathbb{R} \ \forall i \text{ compreso da } 1 \text{ a } n$$

trasposto della precedente notazione

Vettore riga: $x^T = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$$x^{TT} = x$$

PRODOTTO SCALARE IN UNO SPAZIO VETTORIALE V SUL CORPO $\mathbb{R}$

Un prodotto scalare è una funzione di due vettori,
è un'applicazione bilineare — bilineare perché è lineare in ciascuno dei suoi argomenti
simmetrica
definita positiva
su $V \times V$ a valori in $\mathbb{R}$

Prodotto scalare

$S : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

soddisfa le seguenti proprietà:

Simmetria
omogeneità $\Big\}$ linearità
additività
Positività

Simmetria: (S1) $\forall x, y \in V \quad S(x,y) = S(y,x)$

omogeneità: (S2) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad S(\alpha x, y) = \alpha \cdot S(x,y)$

additività: (S3) $\forall x, y, z \in V \quad S(x+z, y) = S(x,y) + S(z,y)$

positività: (S4) $\forall x \in V \quad S(x,x) \geq 0$ e $S(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

IL PRODOTTO SCALARE SU V SI INDICA DI SOLITO CON LE NOTAZIONI:

$$S(x,y) = \boxed{\langle x, y \rangle} = (x,y) = x \cdot y$$

IN $\mathbb{R}^n$ SI HA PURE LA NOTAZIONE

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = X^T Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

↳ vettore colonna
↳ vettore riga

NELLA QUALE SI FA RIFERIMENTO AL PRODOTTO RIGHE PER COLONNE DELLE MATRICI

$$x^T y = (x_1 \; x_2 \; x_3 \; \dots \; x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY BUNIAKOVSKI SCHWARZ

Dimostreremo che dati due vettori x e y dello spazio vettoriale V sul corpo $\mathbb{R}$ euclideo, $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$

$\forall x,y \in \overline{V}$ su $\mathbb{R}$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

DIMOSTRAZIONE

$\forall x,y \in \overline{V},\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x+\lambda y,\ x+\lambda y\rangle \geq 0$$

$\langle v_1, v_2\rangle$ è lo molt. scalare tra vettori

$$\langle x+\lambda y,\ x+\lambda y\rangle = \langle x,\ x+\lambda y\rangle + \langle \lambda y,\ x+\lambda y\rangle =$$

$$\langle x, x+\lambda y\rangle + \lambda\langle y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$$

e sappiamo essere questa quantità ≥ 0 e quindi possiamo scrivere

$$0 \leq \langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$$

questo è un trinomio funzione di λ e risulta essere sempre ≥ 0, questo vero se, in funzione di λ, il suo discriminante è ≤ 0

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (\langle x,y\rangle)^2 - \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

$$(\langle x,y\rangle)^2 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle} \quad \text{c.v.d.}$$

NOTAZIONI : $|x|$ o $\|x\|$ norma o modulo del vettore

$$x \in V \quad (x \in \mathbb{R})$$

In particolare, in $\mathbb{R}^n$ $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

PROPRIETÀ:

$$|\alpha x| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} =$$

$$= |\alpha| \cdot |x|$$

CASO di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$$

$$|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$$

Ed estendendo il concetto a $\mathbb{R}$

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

$$x, y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \leq 1$$

$\cos \widehat{xy} := \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|}$

↳ coseno dell'angolo tra due vettori

DISTANZA IN $\mathbb{R}^n$

Proprietà della distanza

(D1) simmetria

(D2) positività

(D3) disuguaglianza triangolare

DEFINIZIONE DELLA DISTANZA TRA I PUNTI DI $\mathbb{R}^n$

siano x e y due elementi di $\mathbb{R}^n$

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = |y - x| = \sqrt{\langle y-x, y-x \rangle}$$

la distanza dei punti x e y (vettori in $\mathbb{R}^n$) è definita come il modulo della differenza tra y e x.

1) La simmetria è evidente: $d(y, x) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1| \cdot |y-x| = |y-x| = d(x,y)$

2) La positività: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |y-x| = \sqrt{\langle y-x, y-x \rangle} \geq 0$$

Se $d(x, y) = 0$

allora $\langle y-x, y-x \rangle = 0 \Rightarrow y - x = 0$ ossia $y = x$

3) disuguaglianza triangolare: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

consideriamo, ai fini della dimostrazione il quadrato della distanza $d(x, y)$:

$$|y-x|^2 = \langle y-x, y-x \rangle = \langle y-z+z-x, y-z+z-x \rangle$$

e applicando opportunamente la proprietà distributiva del prodotto scalare, rispetto a ciascuno dei due argomenti, il prodotto scalare potrà essere scritto come:

$$= \langle y-x, y-x\rangle + \langle y-z, z-x\rangle + \langle z-x, y-z\rangle + \langle y-z, y-z\rangle =$$

$$= |y-z|^2 + 2\langle y-z, z-x\rangle + |y-z|^2 \leq |y-z|^2 + 2\,|\langle y-z, z-x\rangle| + |y-z|^2$$

Per la disuguaglianza di Schwartz abbiamo

$$\leq |y-z|^2 + 2\,|y-z|\cdot|z-x| + |z-x|^2 =$$

$$= (|y-z| + |z-x|)^2$$

In conclusione abbiamo verificato che

$$|y-x|^2 \leq (|y-z| + |z-x|)^2$$

da cui $\Updownarrow$ deduciamo equivalentemente

$$|y-x| \leq |y-z| + |z-x|$$

ossia che $\quad d(x,y) \leq d(y,z) + d(z,x)$

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$

Sfere e intervalli in $\mathbb{R}^2$.

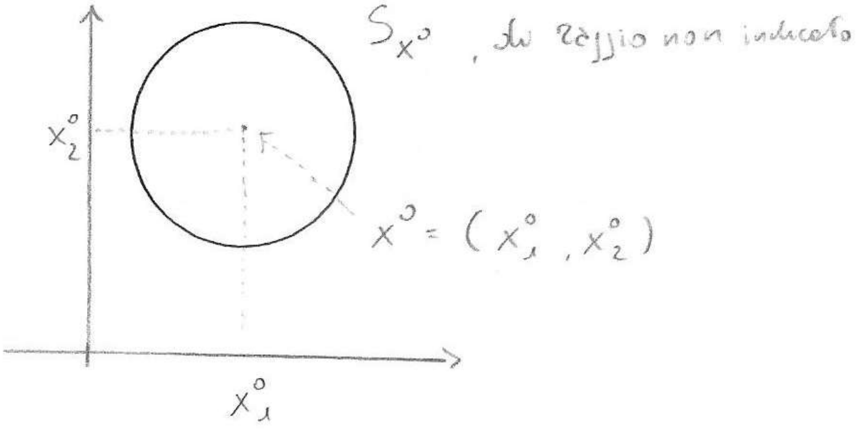
In generale, in $\mathbb{R}^n$

Sia $S_{x_0}^{r}$ la sfera di centro x_0 e raggio r, così definita:

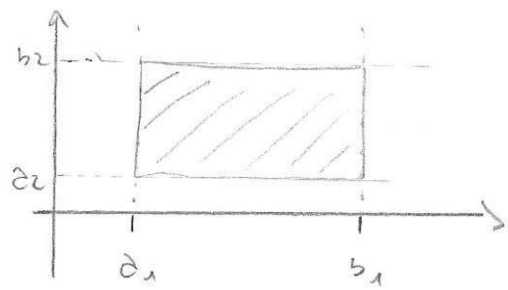
$$S_{x_0}^{r} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$$

questa si dirà una sfera aperta di $\mathbb{R}^n$ di centro x_0 e raggio r

In $\mathbb{R}^2$ la rappresentazione della sfera è:



Intervallo in $\mathbb{R}^2$



In $\mathbb{R}^n$: $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2, \ldots, a_n < x_n < b_n\}$

↳ intervallo aperto

con le definizioni di sfere aperte e intervalli aperti possiamo introdurre le nozioni della TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$.

INTORNO DI UN PUNTO DI $\mathbb{R}^n$

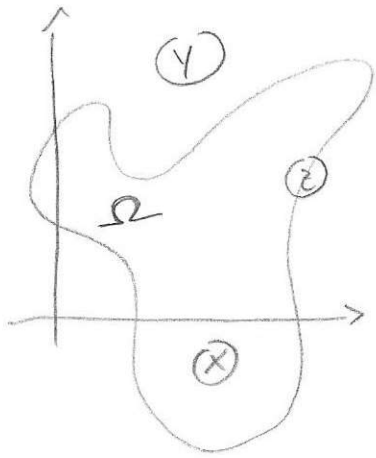
$U \subset \mathbb{R}^n$ intorno di $x^0 \in \mathbb{R}^n$ se $\exists\ r > 0$ tale che $U \supset S_{x^0}^r$

↳ insieme U sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ $\quad$ $r \in \mathbb{R}$

ovvero la sfera di raggio r e centro x^0 è contenuta nell'insieme U

Punti distinti di $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) hanno intorni disgiunti

Dato un qualsiasi insieme Ω (omega) contenuto in $\mathbb{R}^n$ si mette in evidenza rispetto a questo insieme omega le nozioni di punto interno, punto esterno e punto di frontiera



(X) interno — se esiste ~~un intorno~~ una sfera aperta di centro x, di raggio qualsiasi, tutta contenuta in Ω

sferetta centrata in X

(Y) esterno — se il punto y non appartiene a Ω ed esiste una sferetta di centro y tutta fatta del complementare dei punti di Ω

(Z) di frontiera — se in ogni sferetta di centro z e raggio quello che si vuole, cascano sia punti di Ω che del complementare di Ω

In base a queste definizioni riusciremo a dare le definizioni di insieme aperto e insieme chiuso

A è aperto se è intorno di ogni suo punto

C è chiuso se il suo complementare è aperto o se i suoi punti sono di frontiera.

LEZ. 9 CONTINUITA' E DIFFERENZIABILITA' DI FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

Lezione n. 9: Continuità e Differenziabilità di Funzioni di più Variabili

- Estensione delle nozioni di continuità e di limite alle funzioni di più variabili
- Limite alle funzioni di più variabili
- Derivate direzionali e derivate parziali
- Differenziale di una funzione di più variabili
- Continuità in R^n
- Limiti di funzioni a valori in R^n
- Derivate parziali e derivate direzionali
- Differenziale totale e differenziabilità di una funzione

Prof. Gino Tironi

38'33"

CONTINUITA' DI FUNZIONI

in un punto x_0 del dominio A della funzione che non si discosta dalla definizione di continuità della funzione a una variabile.

Concettualmente è la stessa definizione.

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

A è una parte di $\mathbb{R}^n$ e f ha valori in $\mathbb{R}$

DEFINIZIONE ε δ della continuità di una funzione

dato un punto $x^0 \in A$ diremo che f è continua in x^0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che

numero δ_ε

$\forall x \in A$ tale che $|x - x^0| < \delta_\varepsilon$ allora $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$

def: con gli intorni $f : A \underset{\text{contenuto}}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

è continua in $x^0 \in A = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$

se per ogni intorno V di $f(x^0)$

esiste U intorno di x^0 tale che

$\forall x \in U \underset{\text{intersecato}}{\cap} A$ è $f(x) \in V$

Lezione n. 9: Continuità e Differenziabilità di Funzioni di più variabili

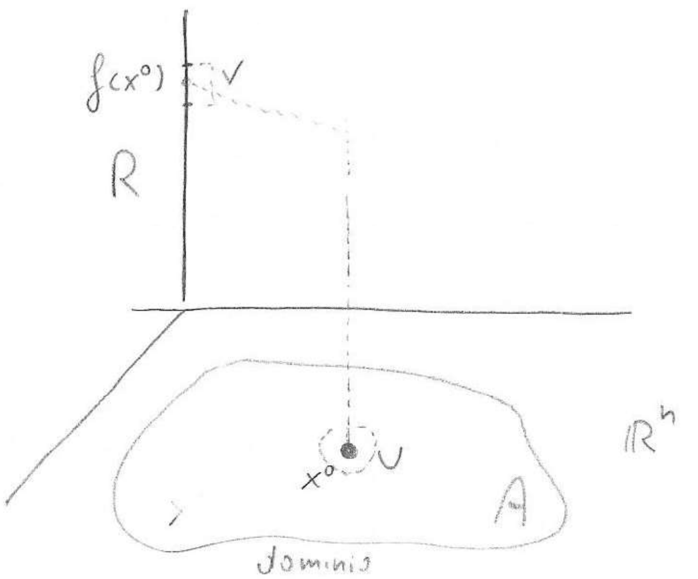
- Estensione della nozione di continuità
- Limite alle funzioni di più variabili
- Derivate direzionali e derivate parziali
- Differenziabilità di una funzione di più variabili
- Continuità in R^n
- Limiti di funzioni a valori in R^m
- Derivate parziali e derivate direzionali
- Differenziale totale e differenziabilità di una funzione

Prof. Gino Tironi
38:32

Si ricorda che, nella definizione precedente

$$\underbrace{|x - x^0|}_{x\text{ uno}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}$$

Geometrizzazione del concetto



LIMITE DI FUNZIONI

def: con gli intorni

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha limite un numero reale per $x \to x^0$

ha limite l per x che tende a $x^0 = (x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n)^T$

punto di accumulazione ($x^0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione per il sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ se ogni intorno V di x^0 contiene infiniti punti di A. Questo implica che A non è un insieme finito

se per ogni V intorno di l

esiste U intorno di x^0 tale che

$\forall x \in U \cap A$, $x \neq x^0$, è $f(x) \in V$

---

def. con gli ε-δ

$\lim_{x \to x^0} f(x) = l$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$\forall x \in A$ se risulta che $\underbrace{0 < |x - x^0|}_{\text{espressione di } x \neq x^0} < \delta_\varepsilon$ allora

x^0 punto di accumulazione

$|f(x) - l| < \varepsilon$ (si noti come $f(x^0)$ si completamente ininfluente)

---

def Definizione di limite infinito

$\lim_{x \to x^0} f(x) = +\infty$ se

$\forall K > 0 \ \exists \delta_K > 0$ tale che
$\forall x \in A$ se risulta che $0 < |x - x^0| < \delta_K$ allora si ha
$f(x) > K$ ($f(x)$ rimane sempre abbastanza grande nell'intorno) x^0

Definizione di limite per $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \quad \text{se}$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, K_\varepsilon > 0$ tale che

$|x| > K$ e $x \in A$ allora

$|f(x) - l| < \varepsilon$

ESEMPIO: UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI NON CONTINUA IN $(0,0)^T$ MA CON RESTRIZIONE AD OGNI RETTA PER L'ORIGINE CONTINUA

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ tranne che su alcuni punti che ha la restrizione a tutte le rette che escono dall'origine continue, ma che non è continua nell'origine.

La f è così definita:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T, \\ \dfrac{xy}{x^2+y} & \text{se } x^2+y \neq 0. \end{cases}$$

la f è definita ovunque eccetto gli punti della parabola $y = -x^2$

Se prendiamo la restrizione alla retta per l'origine $\boxed{x = \alpha t,\ y = \beta t,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$ (uscenti dall'; equazioni della retta), si trova

$$\underbrace{f(\alpha t, \beta t)}_{\text{questa è la restrizione, ovvero } x=\alpha t \text{ e } y=\beta t} = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ \boxed{\dfrac{\alpha \cdot \beta \cdot t}{\alpha^2 t + \beta}} & \text{se } \alpha^2 t^2 + \beta t \neq 0 \end{cases}$$

contiene già una semplificazione di t

9.4

È immediato che

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t) = 0 = f(0,0)$$

Quindi la funzione ha la restrizione alle rette per l'origine tutte continue.
Dunque la restrizione alle rette per l'origine è continua

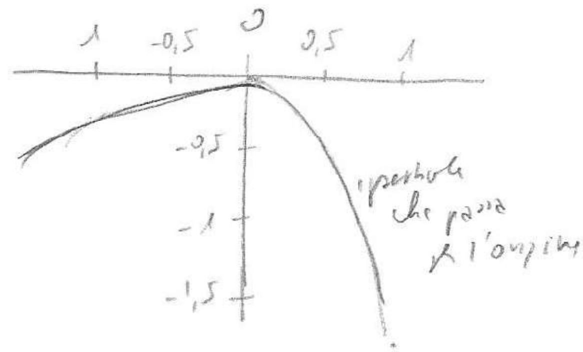
Ma la restrizione all'iperbole per l'origine

$y = kx^2/(x-k)$, con $k \neq 0$ ha valore costante $k \neq 0 = f(0,0)$,
cioè la funzione calcolata lungo quell'iperbole ha un valore costante, equivalente a k, k che individua sostanzialmente l'iperbole.

Anche il limite della funzione preso lungo l'iperbole vale $k \neq 0 = f(0,0)$.

La funzione non è continua in $(0,0)^T$.

Caso $k = 2$



DERIVATE DIREZIONALI
E
DERIVATE PARZIALI

↳ rispetto alla x, alla y, alla x^1, alla x^2 … alla x^n

Abbiamo una funzione di due variabili, x e y, definita su un insieme A ed un punto di coordinate x^0, y^0 che sia interno al dominio A della funzione.
Essendo interno, esiste una sfera di centro x^0, y^0 e raggio opportuno tutta contenuta in A.

La derivata parziale di f rispetto alla variabile x calcolata nel punto x^0, y^0 è:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) = \lim_{x \to x^0} \frac{f(x, y^0) - f(x^0, y^0)}{x - x^0}$$

↳ teniamo fissa la variabile $y = y^0$ e facciamo variare la variabile x

ANALOGAMENTE

La derivata parziale di f rispetto alla variabile y calcolata nel punto x^0, y^0 è:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) = \lim_{y \to y^0} \frac{f(x^0, y) - f(x^0, y^0)}{y - y^0}$$

la variabile x è un parametro, dimentichiamoci di cosa fa la variabile x e la derivata è fatta solo in funzione della variabile y; cambia valore solo la y.

Più in generale, la derivata parziale di n variabili fatta rispetto alla variabile k-esima $= x^k$ in un punto di coordinate $(x_1^0, x_2^0, \ldots$

Ovvero dimenticati della variabilità delle variabili da x_1^0 a x_{k-1}^0 e da x_{k+1}^0 a x_n^0, pensa solo alla variabilità della x_k e fai il rapporto incrementale della variazione rispetto a x_k e considera semplicemente il limite del rapporto incrementale rispetto a x_k.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0) = \lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_k, \dots x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots x_n^0)}{x_k - x_k^0}$$

Esempio: $f(x,y) = e^{xy} \cdot y + \cos(x^2+y^2)$

Derivate parziali:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{derivata di } f \text{ rispetto a } x} = y^2 \cdot e^{xy} + (-) \sin(x^2+y^2) \cdot 2x$$

↳ la y è considerata un parametro e non la facciamo variare; teniamo fissa la y e consideriamo la f in funzione della sola x.

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\text{derivata di } f \text{ rispetto a } y} = x \cdot e^{xy} \cdot y + e^{xy} \cdot 1 - \sin(x^2+y^2) \cdot 2y$$

DERIVATA IN UNA DIREZIONE

Consideriamo la restrizione di una funzione a una retta che passa per un certo assegnato punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e ξ sia un versore di $\mathbb{R}^n$, cioè un vettore di $\mathbb{R}$ che ha norma (o modulo) 1, cioè $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots \xi_n^2 = 1$

e consideriamo una retta passante per x^0 avente direzione ξ, ovvero:

Sia $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)^T$ un versore di $\mathbb{R}^n$ e sia

$x(t) = x^0 + \xi t$ una retta passante per x^0 e avente direzione ξ

allora, la derivata di f

in direzione ξ nel punto x^0

è il limite del rapporto incrementale della restrizione della funzione a quella retta diviso t, ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots x_n^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + \xi t) - f(x^0)}{t}$$

Una derivata direzionale può essere non continua nel punto di derivazione.

Ad esempio una funzione non continua, con tutte le derivate direzionali nulle in $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T, \\ \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T. \end{cases}$$

Sia $\xi = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)^T$ e ξt una retta per l'origine

Andando a prendere la restrizione della funzione alla retta, abbiamo:

$$f(\cos \alpha \cdot t, \operatorname{sen} \alpha \cdot t) = \frac{\cos^4 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \, t^2}{(\cos^4 \alpha \cdot t^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha)^2}$$

(semplificazione sopra e sotto per t^2)

per $t \neq 0$, e si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\cos\alpha \cdot t, \operatorname{sen}\alpha \cdot t) - f(0,0)}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cos^4\alpha \operatorname{sen}^2\alpha \cdot t}{(\cos^4\alpha \cdot t^2 + \operatorname{sen}^2\alpha)^2} = 0$$

Ma $f(x,y)$ non è continua nell'origine.

Infatti la restrizione alle parabole passanti per l'origine $y = \beta \cdot x^2$ $(\beta \neq 0)$ ha un valore costante:

$$f(x, \beta \cdot x^2) = \beta^2 / (1 + \beta^2)$$

Abbiamo dunque un esempio di una funzione che ha tutte le derivate direzionali nell'origine, tutte quante uguali a 0, ma che non è continua nell'origine.

Questo ci fa vedere che la nozione di derivata parziale o derivata direzionale non è la nozione che generalizza in maniera giusta la nozione di derivata di funzioni ad una sola variabile.
Per lo meno non è rispettato il fatto che le funzioni che hanno tutte le derivate direzionali in un punto siano continue in quel punto.

DIFFERENZIALE

DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

si dice differenziabile in

$x^0 = (x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)^T \in A$

se esiste una applicazione

lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$= \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots}$

$$f(x) = f(x^0) + \underbrace{L(x - x^0)}_{\text{"forma lineare" su } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} + \varepsilon(x) \cdot \underbrace{|x - x^0|}_{\text{modulo o norma}}$$

con $\varepsilon(x) \to 0$ se $x \to x^0$

↳ è una funzione infinitesima per $x \to x^0$

LEZ. 10 CONSEGUENZE FONDAMENTALI DELLA CONTINUITÀ E DELLA DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

CONSEGUENZE DELLA CONTINUITÀ

Una funzione è continua in un punto x^0 di A se per ogni intorno V del valore $f(x^0)$ della funzione esiste in corrispondenza un intorno U di x^0 tale che per tutti gli x che stanno in U e nel dominio della funzione, in A naturalmente, $f(x)$ in corrispondenza appartiene a V.

Una funzione si dirà continua in un insieme A, sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, se è continua in ogni punto di A. Se in ogni punto x^0 di A vale quello detto prima.

SOTTOINSIEME LIMITATO DI $\mathbb{R}^n$

def. UN SOTTOINSIEME $A \subset \mathbb{R}^n$ SI DICE LIMITATO SE ESISTE UN NUMERO REALE $R > 0$, TALE CHE

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\} = S_0^R$$

A è contenuto nella sfera di centro l'origine e raggio R

Quindi diremo che un insieme è limitato se, per es., prendendo come centro l'origine di $\mathbb{R}^n$ esiste una sfera sufficientemente grande che racchiude il nostro insieme. Se nessuna sfera è sufficientemente grande da contenere la sfera, l'insieme si dice illimitato.

L'INSIEME CHIUSO.
È l'insieme che contiene tutti i punti di frontiera

def: UN SOTTOINSIEME $K \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATO E CHIUSO SI DICE ANCHE UN INSIEME COMPATTO.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

OGNI FUNZIONE CONTINUA $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, CON K CHIUSO E LIMITATO, HA UN VALORE MASSIMO E UNO MINIMO.

Ovvero esistono due punti x_1 e x_2 appartenenti a K, dove $f(x_1)$ è il massimo dei valori che la f assume su K e $f(x_2)$ è il minimo dei valori che la f assume su K.

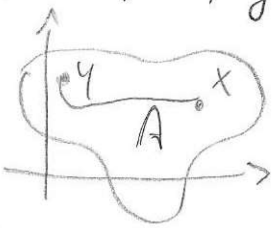
~~TEOREMA DEGLI ZERI~~

def.: UN ARCO DI CURVA CONTINUA È UNA FUNZIONE $f: I \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ NELLA QUALE LE SINGOLE COMPONENTI $f_1(t), \dots, f_n(t)$ SONO FUNZIONI CONTINUE. $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$ ...

$I = [a, b]$ È UN INTERVALLO DELLA RETTA REALE, PER ES. $I = [0, 1]$
↳ intervallo base

def.1 UN SOTTOINSIEME $A \subset \mathbb{R}^n$ SI DICE CONNESSO (PER ARCHI) SE COMUNQUE SI PRENDANO DUE PUNTI $x, y \in A$ ESISTE UN ARCO DI CURVA CONTINUA A VALORI IN A CHE CONGIUNGA x CON y.

$$f(0) = (f_1(0), \dots, f_n(0))^T = x \quad \text{cioè } f_1(0) = x_1,\ f_2(0) = x_2 \dots$$



A è un insieme connesso (per archi)

$$f(1) = (f_1(1), \dots, f_n(1))^T = y$$

TEOREMA DEGLI ZERI

SIA A UN INSIEME CONNESSO IN $\mathbb{R}^n$ E

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

(anche $f(A)$ è un insieme connesso)

UNA FUNZIONE CONTINUA

SE x E y SONO DUE PUNTI DI A TALI CHE

$$f(x) > 0 \quad e \quad f(y) < 0,$$

ALLORA ESISTE $z \in A$ TALE CHE $f(z) = 0$

CONSEGUENZE DELLA DIFFERENZIABILITA'

TEOREMA. OGNI FUNZIONE DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO x^0 E' CONTINUA NELLO STESSO PUNTO.

PER DIMOSTRARE QUESTO TEOREMA RICORDIAMO COSA VUOL DIRE FUNZIONE DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO.

DIFFERENZIABILITA':

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

SI DICE DIFFERENZIABILE IN $x^0 = (x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n)^T$ SE ESISTE UN'APPLICAZIONE LINEARE $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TALE CHE

$$f(x) = f(x^0) + L(x - x^0) + \varepsilon(x) \cdot |x - x^0|$$

$$\text{CON } \varepsilon(x) \to 0 \text{ SE } x \to x^0$$

UN'APPLICAZIONE LINEARE $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SI SCRIVE ESPLICITAMENTE

$$L(x - x^0) = L_1(x_1 - x^0_1) + \dots + L_n(x_n - x^0_n)$$

con $L_1, \dots, L_n$ numeri reali

Il vettore $x - x^0$ si scrive:

$$x - x^0 = (x_1 - x^0_1) \cdot e_1 + (x_2 - x^0_2) e_2 + \dots + (x_n - x^0_n) e_n$$

allora è chiaro che

$$\underset{\substack{\downarrow \\ L \text{ applicato a } (x - x^0)}}{L}(x - x^0) = (x_1 - x^0_1) \cdot \overbrace{L(e_1)}^{= L_1} + \dots + (x_n - x^0_n) \cdot \overbrace{L(e_n)}^{= L_n}$$

e allora è abbastanza immediato riconoscere che

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$$

DIMOSTRAZIONE

$$f(x)=f(x^0)+\underbrace{L(x-x^0)}+\mathcal{E}(x)\,|x-x^0|$$

$$=f(x^0)+\overbrace{L_1(x_1-x_1^0)+\ldots+L_n(x_n-x_n^0)}+\mathcal{E}(x)\,|x-x^0|$$

per $x\to x^0$ $\quad (x_1-x_1^0)\to 0 \quad (x_n-x_n^0)\to 0 \quad \mathcal{E}(x)\to 0 \quad |x-x^0|\to 0$

da questo si deduce che

$$\underbrace{\lim_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)}$$ nell'ipotesi che la f. sia differenziabile

QUESTO È UN ALTRO MODO PER DIRE CHE LA f È CONTINUA NEL PUNTO x^0.

TEOREMA. SE UNA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO x^0 ESSA HA DERIVATA IN OGNI DIREZIONE IN x^0. IN PARTICOLARE, HA TUTTE LE DERIVATE PARZIALI FINITE, SE CALCOLATE NEL PUNTO x^0.

dimostrazione

SIA $x=x^0+vt$ (t è una variabile reale) L'EQUAZIONE DELLA RETTA PER x^0 DI DIREZIONE v.

$|x-x^0|=|t|\cdot|v|=|t|$, poiché $|v|=1$ (v è un versore) ← norma 1

andiamo a calcolare

$$\frac{f(x^0+vt)-f(x^0)}{t}=L(v)+\mathcal{E}(x^0+vt)\cdot\frac{|t|}{t}$$

e ci siamo arrivati in quanto:

$$\frac{\overset{\text{è differenziabile}}{f(x^0+vt)}-f(x^0)}{t}$$

per cui

$$\frac{\cancel{f(x^0)}+\underbrace{L(vt)}_{=t\cdot L(v)}+\mathcal{E}(x^0+vt)\,|v\cdot t|-\cancel{f(x^0)}}{t}=$$

$$\frac{t \cdot L(v) + \varepsilon(x^0 + vt) \cdot |t| \cdot \overset{|v|}{1}}{t} =$$

$$L(v) + \underbrace{\varepsilon(x^0 + vt)}_{\text{tende a 0 quando } t \to 0} \cdot \boxed{\frac{|t|}{t}}$$

questa quantità si mantiene limitata quando $t \to 0$

Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = L(v) = \overset{\text{coefficienti}}{L_1} \underset{\text{prima componente del versore}}{v_1} + \ldots + L_n v_n$$

Questa, per definizione, è la derivata nella direzione v di f calcolata nel punto x^0.

In particolare

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial e_k}}_{\text{derivata nella direzione del versore } k\text{esimo}}(x^0) = L(\overset{\text{0 in tutti i punti, 1 in k}}{e_k}) = L_1 \cdot 0 + \ldots + L_k \cdot 1 + \ldots L_n 0 = L_k = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)}_{\text{derivata parziale rispetto alla variabile } x_k \text{ nel punto } x^0}$$

$$\frac{f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + t, \ldots x_n^0) - f(x^0)}{t \to x_k - x_k^0}$$

INFATTI

per $\frac{\partial f}{\partial e_k} = \lim_{t \to 0}$ scriviamo $x = x^0 + t \cdot e_k$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 \\ &\ldots \\ x_k &= x_k^0 + t \\ &\ldots \\ x_n &= x_n^0 \end{aligned}\right] = \underbrace{\lim_{x_k \to x_k^0}}_{\text{dal cambiamento di variabili}} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_k, x_n^0) - f(x^0)}{x_k - x_k^0}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$$

SI DICE DIFFERENZIALE DI f IN x^0

$$df_{x^0}(x-x^0) = L(x-x^0) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\cdot(x_1-x_1^0)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)(x_n-x_n^0)$$

LA DERIVATA DIREZIONALE SI SCRIVE

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\cdot v_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\, v_n$$

SE f, IN PARTICOLARE, È LA PROIEZIONE SULL'ASSE K-ESIMO, $f(x_1,\dots,x_n)=x_k$, LE DERIVATE PARZIALI DI f RISPETTO A x_i SONO $D_i f(x^0)=\delta_{ik}$ (0 SE $i\neq k$, 1 SE $i=k$), E PERCIÒ IL SUO DIFFERENZIALE IN x^0 È

$$df_{x^0}(x-x^0) = x_k - x_k^0$$

Dunque $dx_k(x-x^0) = x_k - x_k^0$

Da ciò nasce la notazione spesso usata

$$df_{x^0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\cdot \underbrace{dx_1}_{\text{il differenziale della proiezione prima}} +\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\cdot \underbrace{dx_n}_{\text{differenziale della proiezione n-esima}}$$

$dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ sono forme lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

IL VETTORE CHE HA COME COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI DI f IN x^0 SI DICE IL **GRADIENTE** DELLA FUNZIONE IN x^0.

nabla di f calcolato in x^0

$$(\text{grad } f)(x^0) = (\nabla f)(x^0) = \text{il vettore colonna:}$$

$$= ((\partial f / \partial x_1)(x^0), \dots (\partial f / \partial x_n)(x^0))^T =$$

$$= ((\underbrace{D_1}_{\text{derivata rispetto alla prima variabile}} f(x^0), \dots, (D_n f)(x^0))^T$$

SE f È DIFFERENZIABILE IN x^0, ALLORA f HA DERIVATE IN x^0 IN OGNI DIREZIONE

espresse

$$(D_v f)(x^0) = (\text{grad } f)(x^0)\, v =$$

$$= (\nabla f)(x^0) \cdot v = \langle (\nabla f)(x^0), v \rangle$$

Nota: il simbolo ∇ si legge nabla

Una interpretazione geometrica del gradiente:

SUPPONIAMO $|(\nabla f)(x^0)| \neq 0$

POICHÉ $(D_v f)(x^0) = \langle (\nabla f)(x^0), v \rangle = |(\nabla f)(x^0)| \cdot |v| \cdot \cos\theta$

IL MASSIMO DI $\underbrace{(D_v f)(x^0)}_{\text{DERIVATA DIREZIONALE}}$ SI HA PER $\theta = 0$,

IL MINIMO PER $\theta = \pi$

CIOÈ LA DERIVATA DIREZIONALE È MASSIMA NELLA DIREZIONE DI $(\nabla f)(x^0)$;

È MINIMA NELLA DIREZIONE OPPOSTA $-(\nabla f)(x^0)$.

ULTERIORI CONSEGUENZE DELLA DIFFERENZIABILITÀ

quelle geometriche relative all'esistenza di piano, o quando le dimensioni sono maggiori di 2, $n > 2$, di iperpiani, tangenti alle superfici.

Nel caso di funzioni a due variabili, quelle del tipo $z = f(x, y)$, ne possiamo tracciare il grafico e ci possiamo porre il problema se la funzione, in un certo punto, x^0, y^0 o x^0_1, y^0_1, e $z^0 = f(x^0, y^0)$ o $z^0_1 = f(x^0_1, y^0_1)$, ha piano tangente oppure no.

def. differenziabilità

SE f È DIFFERENZIABILE IN x^0 VALE

$$f(x) = \underbrace{f(x^0) + L(x-x^0)} + \varepsilon(x) \cdot |x - x^0|$$

$$\text{con } \varepsilon(x) \to 0 \text{ se } x \to x^0$$

SOMMA DI UNA COSTANTE + TERMINE LINEARE NELLE DIFFERENZE SU $x_1 - x^0_1$, $x_2 - x^0_2$ ...

QUESTA SOMMA IN UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE RAPPRESENTA L'EQUAZIONE DI UN PIANO, IN UNO SPAZIO CON ULTERIORI DIMENSIONI, RAPPRESENTA UN IPERPIANO.

Allora:

IL VALORE DI $f(x)$ È DATO DALLA SOMMA DI UN TERMINE LINEARE, O MEGLIO AFFINE

$$f(x^0) + L(x - x^0)$$

E DI UN CONTRIBUTO INFINITESIMO $\varepsilon(x) \cdot |x - x^0|$

D'ORDINE MAGGIORE DI UNO (RISPETTO A $|x - x^0|$)

IL TERMINE LINEARE (O AFFINE) $f(x^0) + L(x - x^0)$

È IN $\mathbb{R}^n$ L'EQUAZIONE DI UN IPERPIANO, CHE SI DICE

L'IPERPIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f IN x^0

L'EQUAZIONE DELL'IPERPIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f IN x^0

È:

$$z - z^0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)(x_n - x_n^0)$$

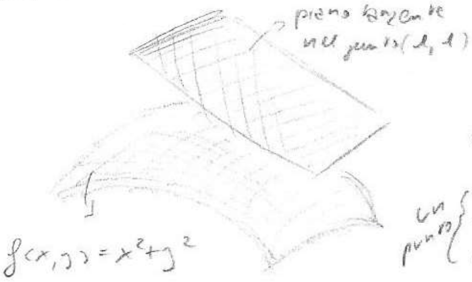
NEL CASO DI DUE VARIABILI ($z = f(x,y)$), IL GRAFICO DELLA FUNZIONE,

AMMESSO CHE LA f SIA DIFFERENZIABILE NEL PUNTO SI HA:

EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x,y)$ IN (x^0, y^0)

$$z - z^0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0)(x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0)(y - y^0)$$

ESEMPIO



$$z = f(x,y) = \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{paraboloide}}$$

un punto $\begin{cases} x^0 = 1 \\ y^0 = 1 \end{cases}$ la f è differenziabile nel punto, il piano tangente ha eq.:

$$z - z^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y^0)$$

$z^0 = 1 + 1 = 2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ in y^0

calcolata nel punto x^0

da cui avremo l'equazione del piano tangente:

$$z - 2 = 2 \cdot (x - 1) + 2(y - 1)$$

il 2 perché $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e nel punto $x^0 = 1$ ha valore 2

LEZ. 11 CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Lezione n.11: Calcolo differenziale per funzioni di più variabili (I parte)

- Il teorema del differenziale totale — assicura condizioni sotto le quali una f è differenziabile
- Regole di derivazione e differenziazione
- Derivazione di funzione composta
- Derivate successive
- Altre notazioni per indicare le derivate successive
- Teorema del differenziale totale
- Regole di derivazione in più variabili
- Derivate parziali successive

Prof. Gino Tironi
40'04"

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

dominio della f, aperto => punto interno

Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto,
ha derivate parziali continue in A,
allora è differenziabile in ogni punto $x^0 \in A$

DIMOSTRAZIONE (per le funzioni di 2 var)

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x^0, y^0)^T \in A$

$f(x) = f(x^0) + L(x - x^0) + \varepsilon(x)\,|x - x^0|$ — $\varepsilon(x) \to 0$ se $x \to 0$

$(x, y) \neq (x^0, y^0)$

$$f(x,y) - f(x^0, y^0) = f(x,y) - f(x^0, y) + f(x^0, y) - f(x^0, y^0) =$$

$$\underbrace{f_{(x)}}_{\text{derivata rispetto a } x}(\xi, y)(x - x^0) + \underbrace{f_y}_{\text{derivata rispetto a } y}(x^0, y^0)(y - y^0) + \varepsilon_1(y)(y - y_0) \quad \text{con } \varepsilon_1(y) \to 0 \text{ per } y \to 0$$

$f(x,y) - f(x^0,y^0) =$

$$f_x(\xi, y)(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)(y-y^0) + \overset{\to 0 \text{ x } y\to y^0}{\varepsilon_1(y)}(y-y^0)$$

$$f_x(\xi,y) = f_x(x^0,y^0) + \varepsilon_2(x,y)(x-x^0)$$

con $\varepsilon_2(x,y)\to 0$ x $(x,y)^T \to (x^0,y^0)$

$$f(x,y)-f(x^0,y^0) = \overbrace{f_x(x^0,y^0)(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)(y-y^0)}^{L\left(\binom{x}{y}-\binom{x^0}{y^0}\right)} +$$

$$\frac{\varepsilon_2(x,y)(x-x^0)+\varepsilon_1(y)(y-y_0)}{|(x,y)^T-(x^0,y^0)^T|}$$

$|(x-y)^T-(x^0,y^0)^T|$

$\beta(x,y)$

$$\frac{\varepsilon_2(x,y)(x-x^0)+\varepsilon_1(y)(y-y^0)}{\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2}} \to 0 \text{ x } (x,y)^T\to(x^0,y^0)^T$$

$$\overset{\to 0 \text{ x } (x,y)\to(x^0,y^0)}{\varepsilon_2(x,y)} \underbrace{\frac{(x-x^0)}{\sqrt{}}}_{\text{limitata}} + \cancel{\varepsilon_1(y)(y-y^0)} \; \overset{\to 0}{\varepsilon_1(y)} \underbrace{\frac{(y-y^0)}{\sqrt{}}}_{\text{similmente limitato}}$$

CVD

Così se la funzione ha derivate continue in tutto l'insieme A allora la f è differenziabile in tutti i punti.

Una funzione che sia continua con derivate prime continue in un aperto A è indicata di solito con

$$C^1(A)$$

REGOLE DI DERIVAZIONE E DI DIFFERENZIAZIONE

VISTA LA DEFINIZIONE DI DERIVATA PARZIALE E IL SUO LEGAME CON LA NOZIONE DI DIFFERENZIALE LE REGOLE DI DERIVAZIONE GIA' NOTE CONTINUANO A VALERE PER LE DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI E PER IL DIFFERENZIALE.

$$\underbrace{D_k}_{\text{derivata parziale rispetto a } x_k} (\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot D_k f + \beta \cdot D_k g$$

SOMMA (Derivata parziale di una somma)

$$\underbrace{d}_{\text{differenziale}} (\alpha f + \beta g) = \alpha \, df + \beta \, dg$$

$$D_k (f \cdot g) = (D_k f) \cdot g + f \cdot (D_k g)$$

PRODOTTO

$$d(f \cdot g) = (df) g + f (dg)$$

$$D_k (f/g) = ((D_k f) g - f (D_k g)) / (g^2)$$

QUOZIENTE

$$d(f/g) = ((df) \cdot g - f (dg)) / (g^2)$$

DERIVAZIONE DI FUNZIONE COMPOSTA

TEOREMA

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto,
differenziabile in $x^0 \in A$, e sia
$g(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ derivabile (se tutte le sue componenti sono derivabili)
in t^0: $g'(t^0) = (x_1'(t^0), \dots, x_n'(t^0))^T$, ($g$ descrive una curva o un arco di curva nello spazio $\mathbb{R}^n$)
$g(t^0) = x^0$, allora è derivabile in t^0 anche la funzione F composta

$$F(t) = f(g(t)), \text{ e vale}$$

$$F'(t^0) = D_1 f(x^0) \cdot x_1'(t^0) + \dots + D_n f(x^0) \cdot x_n'(t^0)$$

$$\text{con } g(t) : I \to \mathbb{R}^n$$

DIMOSTRAZIONE <omessa>

24'50"
...
32'56"

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, dotata di derivate parziali rispetto a x e a y in tutto A o in una sua parte aperta A_1

allora

$D_1 f : A_1 \to \mathbb{R}$ e $D_2 f : A_1 \to \mathbb{R}$, sono funzioni delle quali ci si può chiedere se sono derivabili rispetto a x o a y.

Si potranno considerare

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Si indicherà

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0, y^0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0, y^0)$$

PIÙ IN GENERALE

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Quale relazione c'è tra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0, y^0) \quad ?$$

e più in generale quale relazione c'è tra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0), \ (i \neq k) \quad ?$$

ALTRE NOTAZIONI PER INDICARE LE DERIVATE SUCCESSIVE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0) = f_{xy}(x^0, y^0) = D^2_{xy} f(x^0, y^0) = D^2_{12} f(x^0, y^0), \dots$$

$$\partial^2_{xy} f(x^0, y^0) = \partial^2_{12} f(x^0, y^0)$$

$\hookrightarrow$ IL DISTORTO ∂

E NOTAZIONI ANALOGHE PER

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

TEOREMA DELL'INVERSIONE DELL'ORDINE DELLE DERIVATE

(sull'inversione dell'ordine delle derivate, di K.H.A. Schwarz)

Siano f_{xy} e f_{yx} definite su un aperto A,
"derivate seconde"

e siano continue in $(x^0, y^0) \in A$

Allora $f_{xy}(x^0, y^0) = f_{yx}(x^0, y^0)$

IN GENERALE, PER IL TEOREMA DI SCHWARZ, AMMESSO CHE SIANO CONTINUE IN UN APERTO $A \subset \mathbb{R}^n$, DUE DERIVATE, CALCOLATE NELLO STESSO PUNTO, CHE DIFFERISCONO SOLO PER L'ORDINE DI DERIVAZIONE SONO UGUALI.

Lez. 12 CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI II

35'22"
Prof. Gino Tironi

Formula di Taylor per funzioni di più variabili.
Differenziali successivi

Massimi e minimi liberi

FORMULA DI TAYLOR PER FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

RICORDIAMO LA FORMULA DI TAYLOR, CON IL RESTO ALLA LAGRANGE, PER LE FUNZIONI AD UNA VARIABILE:

SE $f: U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è una funzione $n+1$ volte derivabile in un intorno U del punto x^0, allora esiste un solo polinomio $T_n(x)$, detto di Taylor, di grado $\leq n$, tale che

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ con
$R_n(x) = ((D^{n+1} f)(\xi)/(n+1)!) \cdot (x-x^0)^{n+1}$,
ξ compreso tra x e x^0

In altro modo $R_n(x)$ si può scrivere come:
$R_n(x) = \beta(x) \cdot (x-x^0)^n$, con $\underbrace{\beta(x)}_{\text{una } f \text{ che tende a } 0 \text{ per } x \to x^0} \to 0$ per $x \to x^0$, ossia
$R_n(x) = o((x-x^0)^n)$
La notazione di Landau ci indica $\beta(x) \to 0$ per $x \to x^0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(x^0)}{k!} (x-x^0)^k$$

per $k=0$, il valore della f nel punto che si considera

VEDIAMO COME QUESTA FORMULA CI PERMETTA DI OTTENERNE UNA SIMILE PER LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI, INIZIANDO NEL CASO DI DUE VARIABILI

TEOREMA DI TAYLOR PER FUNZIONI $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha derivate continue
↳ Aperto
fino all'ordine $n+1$, allora

→ di grado max n

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y) \quad \text{con}$$
$$R_n(x,y) = o\left(|(x,y)^T - (x^0,y^0)^T|^n\right)$$

↳ questo significa che $R_n(x)$ diviso per la distanza del punto (x,y) dal punto $(x^0,y^0)^n$ tende a 0 quando $(x,y) \to (x^0,y^0)$

DIMOSTRAZIONE

Siano h e k, le due componenti di un vettore "incremento" di $(x^0,y^0)^T$ in $\mathbb{R}^2$.

$v = (h,k)^T$, $(x,y)^T = (x^0,y^0)^T + v$
↳ vettore colonna

L'equazione del segmento che va da $(x^0,y^0)^T$ a $(x,y)^T$ è:

$$(x(t), y(t))^T = (\underbrace{x^0 + t\cdot h}_{\text{incremento prima variabile}}, \underbrace{y^0 + t\cdot k}_{\text{incr. 2a var.}})^T, \quad 0 \le t \le 1$$

Prendendo come punto base $t^0 = 0$, si trova

$F(t) =$

...

Con $\tilde{t}$ compreso fra 0 e 1.

In particolare, prendendo $t = 1$

$$F(1) = f(x^0+h, y^0+k) = F(0) + F'(0) +$$

$$+ \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \quad (0<\tau<1)$$

Si tratta ora di calcolare, utilizzando la formula di derivazione di funzione composta, i vari contributi presenti nella formula di Taylor-Lagrange

13' $F(0) =$

$F'(0) =$

$F''(0) =$

12.4

Definiamo in generale

$$d^p f(x^0, y^0)(v, v, \dots, v) =$$

$$F^{(p)}(0) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p = 1}^{2} (D_{i_1 i_2 \dots i_p} f)(x^0, y^0) \cdot v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_p}$$

Usando la notazione dei differenziali successivi, la formula di Taylor-Lagrange diviene

30' $f(x^0 + v) =$ ...

Osserviamo che

...

Ma su una sfera chiusa e limitata di centro (x^0, y^0) e raggio $|v|$ le derivate d'ordine $n+1$ sono tutte limitate da una costante M e $v = |v| \cdot \xi$, con ξ versore.

34' Perciò

...

CVD

Se $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, è una funzione di classe $C^{n+1}(A)$, allora vale un Teorema analogo al precedente per funzioni delle m variabili $x_1, x_2, \dots, x_m$

Abbiamo definito il differenziale p-esimo in $(x^0, y^0)^T$ valutato sull'incremento $v = (h, k)^T$ di $(x^0, y^0)^T$

$$d^p f(x^0, y^0)\ (v, v, v, \dots v) =$$

Se la derivazione è fatta r volte rispetto a x e s volte rispetto a y $(r+s=p)$, tenendo presente che $dx(h,k)=h$ e $dy(h,k)=k$ e ricordando il Teorema di Schwarz, si può verificare che

$$d^p f_{(x^0, y^0)} = \sum_{r+s=p} \frac{p!}{r!\,s!} \frac{\partial^p f}{\partial x^r \partial y^s}(x^0, y^0)\, dx^r dy^s$$

In particolare per il differenziale secondo si ha:

$$d^2 f(x^0,y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0,y^0)\,dx^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0,y^0)\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^0,y^0)\,dy^2$$

Per funzioni di n variabili

38'51" ...

LEZ. 13 CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI III

MASSIMO MINIMO RELATIVO (LIBERO)

FORME QUADRATICHE; criteri per i punti di estremo liberi

MASSIMI E MINIMI LIBERI

↳ liberi di variare nel dominio della f

Ricordiamo che, data una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A aperto, un punto $x^0 \in A$, si dice che x^0 è punto di massimo relativo per f se esiste un intorno U del punto tale che per ogni $x \in U$ vale

$$f(x) \le f(x^0)$$

Se per ogni $x \in U$ vale invece

$$f(x) \ge f(x^0)$$

x^0 si dice punto di minimo relativo per f.

Si dice che x^0 è punto di massimo (minimo) assoluto per $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, se per ogni $\underbrace{x \in A}_{\text{e non un intorno del punto } x^0}$ vale $f(x) \le f(x^0)$ (rispettivamente $f(x) \ge f(x^0)$)

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A aperto.

Sia $x^0 \in A$ punto $\underbrace{\text{di massimo o di minimo relativo}}_{\text{punto di estremo relativo}}$ e sia f differenziabile in x^0. Allora

$$\nabla f(x^0) = 0$$

gradiente

Dimostrazione

Basta ricordare che la funzione $g_1(t) = \underbrace{f(t, x_2^0, \dots, x_m^0)}$ ha max o min relativo in x_1^0 e quindi

tutte le variabili fissate eccetto x_1

$$g_1'(x_1^0) = 0 = D_1 f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

e analogamente, facendo lo stesso ragionamento per tutte le funzioni definibili:

tutte le variabili fissate eccetto t

$g_2(t) = f(x_1^0, t, \dots, x_m^0), \dots, g_m(t) = \overbrace{f(x_1^0, x_2^0, \dots, t)}$
hanno max o min relativo in $x_2^0, \dots, x_m^0$.

e quindi

$$g_2'(x_2^0) = 0 = D_2 f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

$$g_m'(x_m^0) = 0 = D_m f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

Dunque

$$\nabla f(x^0) = 0$$

I punti $x^0 \in A$, nei quali $\nabla f(x^0) = 0$ si dicono punti critici o stazionari di A.

I punti di massimo o di minimo relativo di una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^m$ sono da ricercarsi, se f è differenziabile in A, per esempio se $f \in C^1(A)$, tra quelli che soddisfano le m equazioni

$$D_k f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m$$

FORME QUADRATICHE

DOBBIAMO CAPIRE SE I PUNTI CHE ABBIAMO TROVATO, GLI EVENTUALI PUNTI SINGOLARI QUELLI PER CUI $\nabla f = 0$, SONO PUNTI DI MASSIMO RELATIVO, DI MINIMO RELATIVO O NE' L'UNO NE' L'ALTRO.
Questo si fa studiando opportunamente il differenziale secondo e per fare questo ci serve lo studio delle forme quadratiche.

Vogliamo dare condizioni sufficienti per l'esistenza di punti d'estremo (max o min) relativi.
A questo scopo definiremo e studieremo brevemente le forme quadratiche.

Una forma quadratica su $\mathbb{R}^m$ è un polinomio omogeneo di grado due nelle variabili $h_1, h_2, \dots, h_m$.

UNA ESPRESSIONE DEL TIPO

$$q(h_1, h_2, \dots, h_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j$$

Con notazione vettoriale si scrive

$$q(h_1, h_2, \dots, h_m) = h^T A h, \quad h \in \mathbb{R}^m \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

È facile riconoscere che una forma quadratica si può pensare generata da una matrice simmetrica con

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{e quindi} \quad A = A^T$$

Si noti che

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j = \underbrace{a_{11} h_1^2 + a_{22} h_2^2 + \dots + a_{mm} h_m^2}_{\text{Rappresentano elementi in cui } i=j} +$$

$$(a_{12} + a_{21}) \cdot h_1 \cdot h_2 + \dots +$$

$$(a_{ij} + a_{ji}) \cdot h_i \cdot h_j + \dots \text{ ultimi termini}$$

se $a_{12} + a_{21} = 2a'_{12}$ e in generale,

se $a_{ij} + a_{ji} = 2a'_{ij}$ allora, al posto della matrice A originaria, potremmo considerare una matrice A' così formata:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & & a'_{ij} \\ & a_{22} \; \cdots & \\ a'_{ji} & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

matrice simmetrizzata di A.

stessi elementi di A

mappiamo A, al posto di a_{ij}, assegniamo a'_{ij} e al posto di a_{ji} assegniamo a'_{ji}

ma, decidiamo che

$$a'_{ij} = a'_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

Risulterà:

$$q(h_1, \dots, h_m) = h^T A h = h^T A' h$$

↳ matrice che produce la stessa forma quadratica della matrice A, però ha il vantaggio di essere simmetrica

Esempio:

$$q(h_1, h_2) = 3h_1^2 + 6h_1 h_2 + 5h_2^2$$

questa forma quadratica la possiamo pensare generata dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

L'HESSIANO

Sia

$$h^T H h = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} (D_{ij} f)(x^0) h_i h_j}_{\text{GRAZIE al Teorema di Schwarz}}$$

È, come si ricorderà, la forma quadratica associata al differenziale secondo di una funzione nel punto x^0.
La chiameremo l'Hessiano di f in x^0.

Una forma quadratica $q(h_1, h_2, \dots, h_m)$ si dice

1. Definita positiva (negativa) se per ogni $\vec{h} \in \mathbb{R}^m$, $h \neq 0$, $q(h) > 0$ (< 0)
   vettore h

2. Semidefinita positiva (negativa) se per ogni $h \in \mathbb{R}^m$, $h \neq 0$, $q(h) \geq 0$ (≤ 0), ma esiste $h \neq 0$ tale che $q(h) = 0$

3. Indefinita se esistono $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m$, tale che $q(h_1) > 0$ e $q(h_2) < 0$

Data la matrice A associata a una forma quadratica $q(h_1, h_2, \dots, h_m)$, diremo minori principali (di NW = alto a sx = nord ovest) i minori formati con le prime k righe e k colonne di A:

$$M_1 = a_{11}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$M_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \det A$$

13.5

CRITERIO di JACOBI - SYLVESTER

sia data la forma $q(h_1, h_2, \dots, h_m) = h^T A h$

$h^T A h$ è definita positiva se e solo se $M_k > 0$ per $k = 1, 2, \dots, m$

$h^T A h$ è definita negativa se e solo se $(-1)^k M_k > 0$ per $k = 1, 2, \dots, m$

Nel caso delle forme quadratiche in due variabili, possiamo provare un criterio più completo

$$q(h_1, h_2) = a \cdot h_1^2 + 2b\, h_1 \cdot h_2 + c \cdot h_2^2 =$$

$a \neq 0$

$$a\left(h_1 + (b/a) \cdot h_2\right)^2 + \left((ac - b^2)/a\right) \cdot h_2^2 =$$

$$(h_1 \cdot h_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h^T A h$$

dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Allora la forma quadratica $q(h_1, h_2)$

a) è definita positiva (negativa) se e solo se $\det A > 0$ e $a > 0$ (< 0)

b) è indefinita $\det A < 0$

c) è semidefinita positiva (negativa) se e solo se $\det A = 0$ e $a > 0$ (< 0) oppure $a = 0$ e $c > 0$ (< 0)

TEOREMA

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, una funzione $C^2(A)$
↳ aperto
↳ ha derivate prime e seconde continue in ogni punto di A.

Se in x^0 è $\nabla f(x^0) = 0$ e se
↳ è allora un punto critico o singolare

I) $d^2 f_{x^0}$ è definito positivo, allora x^0 è punto di minimo relativo

II) $d^2 f_{x^0}$ è definito negativo, allora x^0 è punto di massimo relativo

III) $d^2 f_{x^0}$ è indefinito, allora x^0 non è punto né di massimo né di minimo relativo. (Punto del tipo di sella)

IV) $d^2 f_{x^0}$ è la forma quadratica nulla o è semidefinita, allora nulla si può concludere in generale

---

In particolare, per funzioni di due variabili

$$H(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

matrice Hessiana
$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right.$ se le è continua in $\left.(x^0, y^0)\right)$

per il teorema di Schwarz, altrimenti mettere $\partial y \partial x$

Se $\det H(x^0, y^0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow (x^0, y^0)$ punto di minimo relativo

Se $\det H(x^0, y^0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow (x^0, y^0)$ è punto di massimo relativo.

Se $\det H(x^0, y^0) < 0$ allora (x^0, y^0) è punto di sella.

Se $\det H(x^0, y^0) = 0$ allora nulla si può dire in generale sulla natura di (x^0, y^0).

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + 8y^3 + 5 - 6xy$

Si determinino i punti di massimo e minimo relativi ed eventuali punti di sella.

1) Calcolare le derivate di f rispetto a x e a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$

Gli eventuali punti di massimo o minimo relativo vanno cercati tra quelli in cui si annullano le derivate. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ \cancel{24}_{4} y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2y = x^2 \\ 4y^2 - x = 0 \Rightarrow x^4 - x = 0 \end{matrix}$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \quad \nearrow \quad x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \quad \text{molt. algebrica } 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

I punti singolari sono 2:

$(0, 0)^T$ e $(1, \frac{1}{2})^T$

2) Per determinare che tipo di punti sono dobbiamo esaminare la matrice Hessiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y$$

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$$

$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ e $\det H(0,0) = -36 < 0 \Rightarrow (0,0)^T$ è un punto di sella (il piano tangente è orizzontale)

$H(1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$ e $\det H(1, \frac{1}{2}) = 6 \cdot 24 - 36 = 108 > 0, \Rightarrow (1, \frac{1}{2})^T$

allora $(1, \frac{1}{2})^T$ è massimo o minimo, dipende dal segno della $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ nel punto.

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0 \Rightarrow$ è punto di minimo relativo della f.

13. 10

Lez. 14 CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI IV

DIFFERENZIAZIONE DI F. DA $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$
FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE

DIFFERENZIAZIONE DI FUNZIONI DA $\mathbb{R}^m$ A $\mathbb{R}^n$

Una funzione $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, A aperto, fa corrispondere a ogni $x \in A$ un solo $y \in \mathbb{R}^n$

$y \in \mathbb{R}^n$ ha n componenti, ciascuna funzione delle m componenti di x

Dunque $y = f(x)$ corrisponde a n funzioni $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

$f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è continua in $x^0 \in A$ se e solo se ciascuna delle componenti $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ è continua in $x^0 \in A$

$f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha limite $l \in \mathbb{R}^n$ per $x \to x^0$ se e solo se ogni componente $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ha limite l_i per $x \to x^0$

def Diremo che $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è **differenziabile** in $x^0 \in A$ se esiste un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che, se $x = x^0 + h$ ($x, x^0, h \in \mathbb{R}^m$)

$$f(x) = f(x^0) + Lh + \beta(h)\,|h| \quad \text{con } \beta(h) \to 0 \text{ se } h \to 0$$

Si verifica che $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile se e solo se lo sono le sue componenti

Si trova che il differenziale di f è rappresentato dalla seguente matrice L con m colonne ed n righe.

$$L = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x^0) & D_2 f_1(x^0) & \dots & D_m f_1(x^0) \\ D_1 f_2(x^0) & D_2 f_2(x^0) & \dots & D_m f_2(x^0) \\ \dots & & & \dots \\ D_1 f_n(x^0) & D_2 f_n(x^0) & \dots & D_m f_n(x^0) \end{pmatrix}$$

Nella matrice L ogni riga è il differenziale di una componente f_i di f

Ci interesserà nel seguito la seguente formula di derivazione di funzione composta più generale di quella già dimostrata.

TEOREMA della DERIVAZIONE DI FUNZIONE COMPOSTA
Sia $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, A aperto, differenziabile in x^0, $g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to A \subset \mathbb{R}^m$, Ω aperto, $x^0 = g(u^0)$, esistano finite in u^0 tutte le derivate $\partial_{u_i} g_k(u^0)$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, allora

$F(u) = f(g(u))$, A aperto, ha tutte le derivate parziali $\partial_{u_i} F_z$ e vale

$$\frac{\partial F_z}{\partial u_k}(u^0) = \frac{\partial f_z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u_k} + \dots + \frac{\partial f_z}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial u_k}$$

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che esiste il limite seguente:

$$\lim_{u_k \to u_k^0} \frac{F_2(u_1, \dots, u_m) - F_2(u_1^0, \dots, u_m^0)}{u_k - u_k^0} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u^0) + \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x^0) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial u_m}(u^0)$$

a fine dimostrazione

$$F_2(u_1, \dots, u_m) = f_2(g_1(u_1, \dots, u_m), \dots, g_m(u_1, \dots, u_m))$$

13'

14'20''

FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE

Un modo ben noto di rappresentare graficamente una funzione di due variabili ($z = f(x,y)$) è quello di tracciarne le linee di livello, cioè

i luoghi dei punti del piano (x,y) che soddisfano la condizione $f(x,y) = \text{costante}$

Si ritiene, in generale, che questi luoghi siano curve piane più o meno "regolari".

Sono ben noti alcuni esempi:

linea di livello per la superficie $f(x,y) = x^2+y^2-2y$

1) $x^2 + y^2 - 2y = 3$ è una circonferenza con centro in $(0,1)^T$ e raggio 2
(sommare +1 ad entrambi i membri)

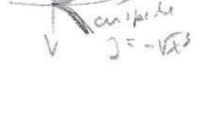
linea di livello; non è una condizione verificata

2) $\underbrace{x^2 + 4y^2}_{\text{sempre} \geq 0} = -3$ è l'insieme vuoto dei punti del piano

3) $x^2 + y^2 = 0$ è l'insieme contenente solo l'origine del piano

4) $x^2 - y^2 = 0$ è l'insieme del piano formato dall'unione delle due rette $y = x$ e $y = -x$

5) $x^3 - y^2 = 0$ è una curva piana non regolare, dotata di una cuspide nell'origine



Possiamo dunque chiederci sotto quali condizioni una equazione del tipo $f(x,y) = $ costante, possa rappresentare una curva piana; anzi, almeno localmente, una curva che sia un grafico di una funzione.

In molti casi, una curva piana non sarà grafico di una funzione.

La curva data da $x^2+y^2-2y=3$ può essere rappresentata come grafico di due funzioni in cui x è funzione di y:

$$x = g_1(y) = (3-y^2+2y)^{\frac{1}{2}}$$
e
$$x = g_2(y) = -(3-y^2+2y)^{\frac{1}{2}}$$

TEOREMA di ULISSE DINI

funzioni continue e dotate di derivate parziali rispetto x e y continue

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $C^1(A)$, sia (x^0, y^0) in A tale che $f(x^0, y^0) = 0$ e $\partial_y f(x^0, y^0) \neq 0$, allora esiste un rettangolo aperto $I \times J$ intorno di $(x^0, y^0)^T$ tale che $f^{-1}(0) \cap (I \times J)$

che cadono in $I \times J$

controimmagine dello 0, $f(x,y)=0$

sia il grafico di $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
funzione di classe $C^1(I)$; quindi
per ogni $x \in I$, $f(x, g(x)) = 0$

$$\text{Vale } g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

$f_x = D$ rispetto a x

$f_y = D$ rispetto a y

Il teorema qui enunciato può essere generalizzato in molti modi

Una generalizzazione tra le più semplici:

30'

32'

Un esempio: $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(z) + xy^2 + y^3 - 8 = 0$

nel punto $(0,2,0)^T$ (definire una f. z in funzione di x, y)

$f(0,2,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,0) = \cos z \big|_{z=0} = 1 \neq 0$, allora esiste una funzione definita implicitamente:

$$\exists\, g : U \to \mathbb{R} \text{ t. che } f(x,y,g(x,y)) = 0 \quad \forall x \in U$$

$$\text{e } \frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}$$

UNA PROPRIETÀ DEL GRADIENTE

Si supponga che l'equazione $f(x,y) =$ costante definisca una curva di livello dotata di derivate continue in (x^0, y^0).

Se $x(t)$, $y(t)$ sono le equazioni parametriche della curva, lungo la curva stessa,

$F(t) = f(x(t), y(t)) =$ costante
perciò $F'(t) = 0$;
ma $F'(t) = \langle \underbrace{\nabla f(x(t), y(t))}, \underbrace{(x'(t), y'(t))^T} \rangle = 0$.
-> moltiplicat.
quindi

Il gradiente è ortogonale alle linee di livello di una funzione.

INVERTIBILITÀ LOCALE

36' -> Sia $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, A aperto, una funzione.

Diremo che f è localmente invertibile in $x^0 \in A$ se esistono un intorno U di x^0 ed un intorno V di $f(x^0)$ tali che f è biiettiva tra U e V.

E quindi $f(U)$ è uguale all'immagine di V.

Se f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra A e la $f(A)$, diremo che f è globalmente invertibile in A.

Se $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, A aperto, è differenziabile in $x^0 \in A$, la matrice $m \times m$ che rappresenta il suo differenziale è detta anche la derivata o la matrice jacobiana o il jacobiano di f in x^0.

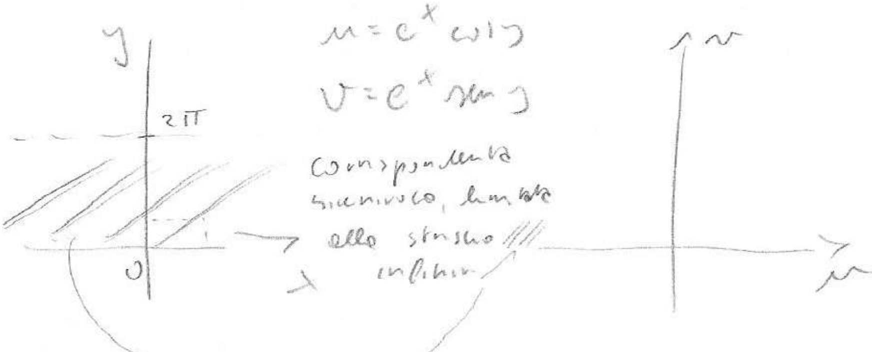
$$f'(x^0) = J\left(\frac{f}{x}\right)(x^0) = J\begin{pmatrix} f_1, f_2, \dots, f_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{pmatrix}(x^0)$$

TEOREMA di INVERTIBILITÀ LOCALE

Se $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, A aperto, è $C^1(A)$ (f continua con derivate prime continue), e $\det J\left(\frac{f}{x}\right)(x^0) \neq 0$ allora f è localmente invertibile in $x^0 \in A$.

SI NOTI CHE UNA FUNZIONE PUÒ ESSERE LOCALMENTE INVERTIBILE SENZA ESSERLO GLOBALMENTE.

Ad es.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $u = \exp(x) \cdot \cos y$ ($e^x \cos y$) $v = \exp(x) \sin y$ ($e^x \sin y$)
ha il det. jacobiano $\det J = e^{2x} \neq 0$ ed è in ogni punto localmente invertibile tra il piano (x, y) e il piano (u, v).
Ma non è invertibile globalmente poiché u e v sono periodiche di periodo 2π.



Lez. 15

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI V

. cambiamento di variabili
. Estremi vincolati
38'41"

Prof Gino Tironi

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

SI RICORDA CHE UNA FUNZIONE RISULTA LOCALMENTE INVERTIBILE SE IL DETERMINANTE JACOBIANO DELLA FUNZIONE IN UN PUNTO SIA DIVERSO DA 0.

Un'applicazione $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, A aperto, si dice regolare se è di classe $C^1(A)$ e se $\det J(f)(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$.

Questo ci assicura che f è localmente invertibile in ogni punto di A.

Una tale applicazione individua un cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^m$.

Se le condizioni dette non sono soddisfatte in alcuni punti isolati, tali punti si dicono singolari per la trasformazione.

Esempio: Trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^m$

$$y = f(x) = Ax$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}$ $\quad \in \mathbb{R}$

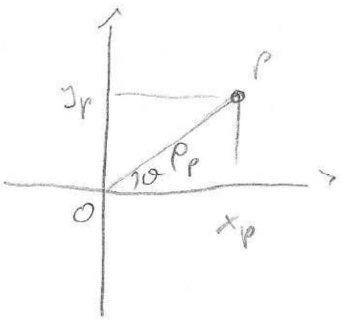
La trasformazione è così ottenuta:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$J\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = A$$

$$\det J\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \det A$$ se $\neq 0$ la trasf risulta essere localmente invertibile

ESEMPIO : COORDINATE POLARI in $\mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \,,\ \vartheta \in \mathbb{R} \ \ (0 \leq \vartheta < 2\pi)$$

$$J = \begin{pmatrix} x & y \\ \rho & \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det J = \rho\,(\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta) = \rho$$

La trasformazione è regolare purché sia $\rho \neq 0$. $\underset{\text{l'origine}}{\rho = 0}$ è l'unico punto singolare

ESEMPIO : COORDINATE CILINDRICHE in $\mathbb{R}^3$

TRASFORMAZIONI

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \,,\ \vartheta \in \mathbb{R} \,,\ \ (0 \leq \vartheta < 2\pi) \\ y = \rho\sin\vartheta & u \in \mathbb{R} \\ z = u \end{cases}$$

$$J\begin{pmatrix} x & y & z \\ \rho & \vartheta & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice jacobiana delle trasformazioni

$$\det J = \rho$$

I punti singolari corrispondono a $\rho = 0$, cioè i punti dell'asse z.

ESEMPIO: COORDINATE SFERICHE

latitudine — angolo di longitudine

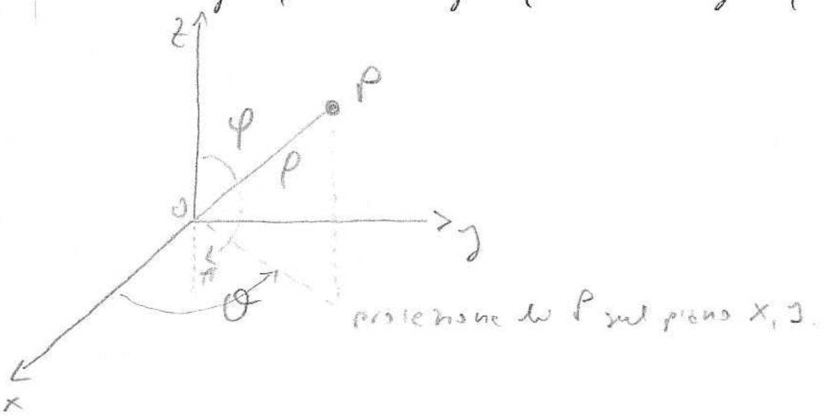
$$x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \qquad \rho \geq 0,\quad 0 \leq \varphi \leq \pi,\quad 0 \leq \vartheta < 2\pi$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

derivata di x rispetto a ρ — d. di x rispetto a φ — d. di x a ϑ

$$J = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \rho & \varphi & \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\sin\varphi\cos\vartheta} & \boxed{\rho\cos\varphi\cos\vartheta} & \boxed{-\rho\sin\varphi\sin\vartheta} \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J = \rho^2 \sin\varphi$$

I punti singolari sono i punti dell'asse z. Il det J si annulla per $\rho = 0$ o per $\varphi = 0$ o per $\varphi = \pi$



ESEMPIO: CAMBIAMENTO DI VARIABILI NELL'EQUAZIONE DELLE ONDE

13'40" - $$c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad \xrightarrow{\text{trasf}} \quad \begin{aligned} u &= x + ct \\ v &= x - ct \end{aligned}$$

c: velocità di propagazione delle vibrazioni

$\tilde{z}(u,v)$

$$z(x,t) = \tilde{z}(u(x,t), v(x,t))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\tilde{z}$$

15' →

da cui

$$4c^2 \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial u \partial v} = 0 \qquad 4c^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v} = f(v) \Rightarrow \tilde{z} = F(v) + G(u)$$

$$\tilde{z}(u,v) = F(u) + G(v)$$

$$z(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

ESTREMI VINCOLATI

Abbiamo appreso come calcolare gli estremi liberi di funzioni di più variabili.

Spesso si devono cercare i valori massimi o minimi di una funzione quando le variabili non sono libere di muoversi in un aperto $A \subset \mathbb{R}^m$ ma sono soggette a vincoli, rappresentati da certe funzioni definite in A.

Per esempio si cerca la posizione d'equilibrio di una particella soggetta a un campo di forze di potenziale $f(x,y)$ vincolata a stare su una linea piana espressa da $g(x,y)=0$.

22'32" Se l'equazione

25' TEOREMA (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)

38' Perché tra gli 8 punti trovati troveremo i massimi e i minimi?

Il vincolo è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ (è un ellissoide), di $\mathbb{R}^3$.

Il teorema di Weierstrass dice che una funzione su un insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo.

LEZ. 16 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Prof. Gino Tironi
35' 15"

. Generalità sulle E.D.
. Alcuni tipi del prim'ordine

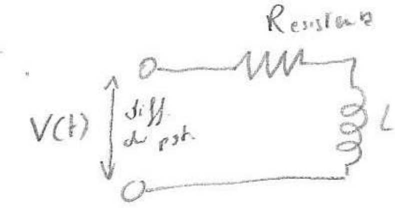
Molti problemi di tipo fisico-tecnico o geometrico, conducono a considerare equazioni nelle quali intervengono come incognite i valori di una funzione $y(x)$ e delle sue derivate $y', y'', \dots$

1) Ad es. l'equazione di un semplice circuito elettrico in serie, con una resistenza e una induttanza, l'eq. del circuito, ammesso che in esso sia inserita una differenza di potenziale è

$V(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di}{dt}$ dove la funzione incognita è $i(t)$

↳ è una funzione nota, oppure una diff. di pot. da misurare agli estremi del circuito; R è la resistenza; le cadute di potenziale si misura con $R \cdot i(t)$ e le variazioni di corrente date nel passaggio attraverso un'induttanza sono del tipo $L\,\frac{di}{dt}$

Il circuito in oggetto è:



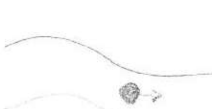
se ci fosse anche una capacità, allora l'eq. diventa di tipo integro-differenziale e si può ridurre ad una pura E.D. differenziando una volta.

2) Ad es. la traiettoria di un galleggiante (per es. un sughero) che si muove nelle corrente di un fiume.

Formalmente ⇒

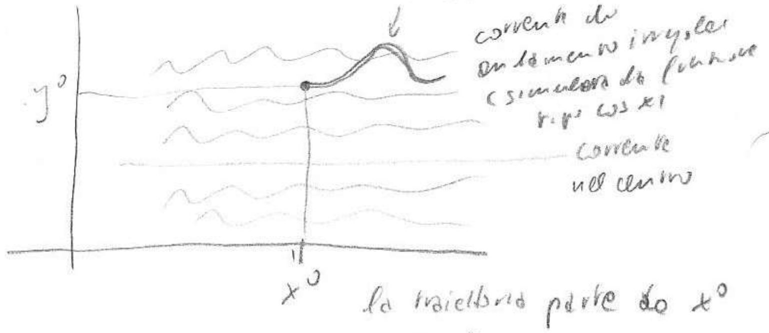
IN OGNI PUNTO DI UN INSIEME APERTO $A \subset \mathbb{R}^2$ CHE RAPPRESENTA LA SUPERFICIE DI UN TRATTO DEL FIUME È ASSEGNATA UNA DIREZIONE DI MOTO (UN CAMPO DI DIREZIONI). $y(x)$ = la derivata = pendenza della tangente alla traiettoria in quel punto

$y'(x) = f(x, y)$
↳ una possibile traiettoria



si cerca la traiettoria del galleggiante che, partendo da una posizione iniziale (x^0, y^0) si muove in modo che il suo moto sia sempre tangente alla corrente;

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$$



la traiettoria parte da x^0 e vale y^0.

3) Es.: data una famiglia di curve piane dipendenti da un parametro $f(x, y; c) = 0$ trovare l'eq. diff. della famiglia.
L'eq. diff. della famiglia si ottiene, in condizioni favorevoli eliminando la costante c dalle equazioni

$$f(x, y; c) = 0 \quad \text{famiglia delle curve}$$

$$f_x(x, y; c) + f_y(x, y; c)\, y' = 0$$

se da queste due eq. si elimina la costante c, troveremo in corrispondenza una E.D. detta della famiglia di curve

f_x: derivata rispetto a x

3.1) Per esempio, la famiglia delle circonferenze con centro sull'asse x e passanti per l'origine $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ (1)
ha eq. diff. $y^2 - x^2 - 2x \cdot y \cdot y' = 0$
Infatti, la derivata totale della funzione (1) è:
$2(x-a) + 2y \cdot y' = 0$ (2), che messa a sistema con la (1), se eliminiamo la costante a dalle due eq., allora troviamo l'E.D. della famiglia delle curve

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 - a^2 = 0 \\ 2(x-a) + 2y \cdot y' = 0 \implies x - a + yy' = 0 \implies a = x + yy' \end{cases}$$

$\implies x - a = -yy'$

$$(-yy')^2 + y^2 - (x + yy')^2 = 0$$

$$\cancel{y^2 y'^2} + y^2 - x^2 - 2 \cdot x \cdot yy' - \cancel{y^2 y'^2} = 0$$

da cui $y^2 - x^2 - 2x \cdot y \cdot y' = 0$ = (2) cvd.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n

def:

Data $f : A \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, A aperto, un'equazione del tipo

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

si dice **equazione differenziale di ordine n** se f dipende effettivamente da $y^{(n)}$.

L'equazione si dice di **forma normale** se è risolta nella derivata d'ordine massimo, di aspetto

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Una funzione che $y(x)$ che sia n volte derivabile con continuità e che sostituita nell'equazione differenziale la soddisfi identicamente $\forall x \in I$ dello relativa si dice una **soluzione o integrale** dell'equazione → sia di quella in forma normale che quella data generale

Un problema tipico che si pone per equazioni differenziali del prim'ordine o per sistemi di equazioni del prim'ordine è il **Problema di Cauchy o ai valori iniziali** che consiste nel trovare $y(x)$ definita su un intervallo I, con $x^0 \in I$ tale che

$$(1) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$$

TEOREMA nella 1ª parte di esistenza e unicità per il problema di Cauchy

(Peano)

Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua, allora esistono $h > 0$ e $y :]x^0 - h, x^0 + h[\to \mathbb{R}$

numero soluzione del problema.

Se $f_y : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esiste ed è continua, allora la soluzione per il problema di Cauchy è unica.

NEL SEGUITO

SOLUZIONI DI ALCUNI TIPI PARTICOLARI DI EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

sono equazioni del tipo:

$$(2) \qquad y' = g(x) \cdot h(y)$$

CONDIZIONI:

con $g(x)$ definita e continua su un intervallo I di $\mathbb{R}$ e $h(y)$ di classe $C^1(J)$ su J intervallo di $\mathbb{R}$. ($A = I \times J$)

Allora anche y' è definita su tutto l'spazio A ed è continua rettangolo prodotto cartesiano $I \times J$.

Sotto queste condizioni il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione locale.

COME SI PROCEDE alla SOLUZIONE DI QUESTA EQ.:

Il problema di Cauchy è $\begin{cases} y' = g(x) \cdot h(y) \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$

con condizione iniziale

supponiamo che h calcolato nel punto y^0 sia uguale a 0; allora la soluzione costante che vale costantemente ~~0~~ è una soluzione del problema.

ovvero:

- Se $h(y^0) = 0$, allora $y(x) = y^0$, cioè la soluzione è la funzione costante.
- Se $h(y^0) \neq 0$, allora la soluzione non s'annulla in alcun punto. (Perché ??)

Dividendo la (2) $y' = g(x) \cdot h(y)$ per $h(y) \neq 0$, si trova

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

quanto problema si riduce a trovare le primitive, è un problema di integrazione. Possiamo calcolare $\int_{x^0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt$ $\int_{x^0}^{x} g(t)\, dt$

t per non confondere la var. di integrazione con quella della f.

da cui:

$$\int_{x^0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int_{x^0}^{x} g(t)\, dt$$

si tratta di trovare una primitiva della f. $g(t)$ e calcolare l'integrale definito e poi calcolare l'integrale definito $\frac{y'(t)}{h(y(t))}$

SAPPIAMO CHE POSSIAMO FARE UN CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$y(t) = z \Rightarrow dz = y'(t)\, dt$

$t = x^0 \Rightarrow y(x^0) = y^0$

$t = x \Rightarrow y(x)$

da cui

$$\int_{y^0}^{y(x)} \frac{dz}{h(z)} = \int_{x^0}^{x} g(t)\, dt$$

Sia $H(y)$ una primitiva della funzione $\frac{1}{h(z)}$

e sia $G(x)$ una primitiva di $g(t)$,

allora gli integrali si scrivono in maniera esplicita come segue:

$$H(y(x)) - H(y^0) = G(x) - G(x^0)$$

$$H(y(x)) = G(x) - G(x^0) + H(y^0)$$

h è invertibile; per cui:

$$y(x) = H^{-1}\left(G(x) - G(x^0) + H(y^0) \right)$$

Questo è il metodo di risoluzione di E.D. a variabili separabili

Esempio:

Risolvere: $y' = y^2$ definita su tutto $\mathbb{R}^2$ con $y(x^0) = y^0$

$$y(x) = \frac{y^0}{1 + y^0(x^0 - x)} \quad \text{(Soluzione)}$$

Svolgimento:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$$

dividiamo per y^2

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \quad \text{equivalente a} \quad \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y^0} = x - x^0$$

$$\frac{1}{y^0} + x^0 - x = \frac{1}{y(x)} \quad \text{e il reciproco}$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y^0} + x^0 - x} = \frac{y^0}{1 + y^0(x^0 - x)}$$

È DA NOTARE CHE LA SOLUZIONE NON ESISTE SULLA RETTA REALE
MA UN PUNTO DI ARRESTO LOCALE.
OVVERO LA SOLUZIONE NON È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$, BENCHÉ $f(x, y)$ SIA DEFINITA IN $\mathbb{R}^2$.

EQUAZIONI OMOGENEE

SONO LE EQ. DEL TIPO

$$(3) \qquad y' = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

funzione positivamente omogenea di grado 0

PRENDENDO COME NUOVA FUNZIONE INCOGNITA

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

L'EQ. (3) SI TRASFORMA IN

$$u'(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x}$$ CHE E' A VARIABILI SEPARABILI

Esempio : $y' = \frac{y}{x+y}$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, poniamo $\frac{y}{x} = u$ e questa è la nuova variabile.

$y = u(x) \cdot x$

$$y' = u' \cdot x + u$$
$$u' \cdot x + u = f(u)$$ e dividendo per x, imposto $x \neq 0$
$$u' x = f(u) - u$$
$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

Esempio: $y' = \frac{y}{x} + tg \frac{y}{x}$

$$y(x) = u(x) \cdot x$$
$$u' \cdot x + u = \frac{u}{1+u}$$
$$u' x = \frac{u}{1+u} - u = \frac{u - u - u^2}{1+u} = -\frac{u^2}{1+u}$$
$$u' x = -\frac{u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{1+u}{u^2}\, du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{u^2}(1+u)\,du = -\frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{u} + \log|u| = -\log|x| + k$$

non potrai mettere questo

$\log|x| = \frac{1}{u} - \log|u| + k$

$x>0$ $\begin{cases} x = \dfrac{e^{\frac{1}{u}}}{u} \cdot k_1 \\ y = x \cdot u = k_1 \, e^{\frac{1}{u}} \end{cases}$ Rappresentazione parametrica delle sol.

LEZ. 17 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
ALTRI TIPI DI INTEGRABILI "PER QUADRATURA"

Prof. Gino Tironi
38'38"

- ULTERIORI TIPI D'EQ. DEL I° ORDINE
- ALCUNI CASI TIPICI DI EQ. DEL II° ORDINE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$(4) \quad y' = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue definite su un intervallo I e valori in $\mathbb{R}$.

L'equazione (4) si dice anche **equazione completa**, mentre

$$(5) \quad y' = a(x) \cdot y(x)$$

si dice **equazione omogenea** associata alla (4).

Se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, allora la totalità delle soluzioni di (5) è data da

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)}$$

dove c è una costante reale arbitraria.

Vale ora il seguente fatto generale (per le equazioni lineari):
Se $z(x)$ è una generica soluzione dell'omogenea e $\overline{y(x)}$ è una soluzione particolare dell'equazione completa, allora le funzioni del tipo:

$$y(x) = z(x) + \overline{y(x)}$$

forniscono tutte le soluzioni dell'equazione completa.
Dimostriamo che una soluzione particolare dell'equazione completa è data da:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{(A(x)-A(t))} \cdot b(t)\, dt$$

Dimostreremo ciò utilizzando il metodo detto di "variazione delle costanti arbitrarie".
Si cerca la soluzione $y(x)$ nella forma $y(x) = \underbrace{c(x)}_{\text{la nuova incognita}} e^{A(x)} \dots$
Allora si può concludere che la soluzione generale del problema di Cauchy per la (4).

DIMOSTRAZIONE

Si vuol trovare una soluzione a $y' = a(x) \cdot y + b(x)$
dove $y(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$ in cui $A'(x) = a(x)$ è una primitiva
Se $y(x)$ ha questa forma, calcoliamone la derivata:

$$y' = c' \cdot e^{A(x)} + c \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x) = c' e^{A(x)} + c \cdot a(x) \cdot e^{A(x)}$$

sostituendo nell'espressione dell'eq. diff troviamo che:

$$c' \cdot e^A + \cancel{c \cdot a(x)\, e^A} = \cancel{a(x)\, c \cdot e^A} + b(x) \quad \text{ovvero}$$

$$c' \cdot e^A = b(x) \quad \text{quindi dobbiamo risolvere}$$

$$c'(x) \cdot e^{A(x)} = b(x)$$ moltiplichiamo per $e^{-A(x)}$ i due membri dell'eq.

$$c'(x) = b(x) \cdot e^{-A(x)}$$ integrando entrambi i membri

$$c(x) - c(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

$$y(x) = c(x) \cdot e^{A(x)} = \int_{x_0}^{x} e^{[A(x) - A(t)]} \cdot b(t)\, dt$$

che è la forma annunciata di un integrale particolare dell'eq. diff.

Dunque possiamo concludere

(PC) problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$$

è data da

(SG) soluzione o integrale generale
$$y(x) = \underbrace{c \cdot e^{A(x)}}_{\text{Integrale generale dell'omogenea}} + \underbrace{\int_{x^0}^{x} e^{[A(x) - A(t)]} \cdot b(t)\, dt}_{\text{Integrale particolare}}$$

Integrale generale dell'eq. completa
detto anche "Soluzione"

Possiamo dire che il problema di Cauchy (PC) ha soluzione generale data dalla (SG).

Esempio: $y' = y + x$

$a(x) = 1$, $A(x) = x$ $b(x) = x$

soluzione:

$$y(x) = c \cdot e^{x} - x - 1 + e^{x}$$

Esempio: $y' = \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x^2}$

$$a(x) = \frac{1}{x}, \quad A(x) = \log|x|, \quad b(x) = \frac{1}{x^2}$$

Soluzione:
generale dell'eq. completa

$$y(x) = c \cdot x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

Esempio: $y' = -2 \cdot e^x \cdot y + e^x$

$$a(x) = -2 \cdot e^x, \quad A(x) = -2 \cdot e^x$$
$$b(x) = e^x$$

Soluzione:

$$y(x) = c \cdot e^{-2e^x} + \frac{1}{2} \cdot \left[1 - e^{2-2e^x}\right]$$

EQUAZIONI DI BERNOULLI

NON LINEARE

Sono le equazioni del tipo

metodo: ridurre queste eq. non lineari a eq. lineari

non linearità

$$(6) \quad y' = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y(x)^k$$

con $k \neq 0, 1$ e $a(x)$, $b(x)$ funzioni continue definite su un intervallo I a valori in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che se è $0 < k < 1$, non è garantita l'unicità della soluzione; infatti f_y può non essere definita.

Se $k > 0$, $y = 0$ è una soluzione.

Supposto $y(x) \neq 0$, dividendo per $y(x)^k$ e prendendo come nuova incognita $u(x) = y(x)^{1-k}$, si trova l'equazione lineare

$$u'(x) = (1-k) \cdot a(x) \cdot u(x) + (1-k) \cdot b(x)$$

che è un'equazione lineare che sappiamo risolvere.

DIMOSTRAZIONE

$$y' = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y(x)^k \quad / : y(x)^k$$

$$D(y(x))^{1-k} = (1-k) \cdot y(x)^{1-k-1} \cdot y'(x) = (1-k) \cdot \frac{y'(x)}{y(x)^k}$$

$$\frac{y'}{y^k} = a(x) \cdot y^{1-k} + b(x)$$

quindi, moltiplicando tutto per $1-k$ e assumendo come nuova incognita la funzione $u(x) = y^{1-k}$ troveremo proprio l'eq. diff. lineare ovvero

$$(1-k)\frac{y'}{y^k} = (1-k) \cdot a(x) \cdot y^{1-k} + (1-k)\, b(x)$$

$u(x) = y(x)^{1-k}$, da cui

$$u'(x) = (1-k) \cdot a(x) \cdot u(x) + (1-k)\, b(x)$$

ovvero ottenendo una eq. lineare nella nuova variabile $u(x)$.

Esempio: risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$y' = 2 \cdot y(x) \cdot tg(x) + y(x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{non linearità}$$

$y(0) = 1$, con $|x| < \frac{\pi}{2}$

$u(x) = y(x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y(x)}$ $\qquad a(x) = tg(x)$, $b(x) = 1$

$$\Rightarrow A(x) = \int \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx = -\int \frac{d\, cos\, x}{cos\, x}\, dx = -\log|cos\, x|$$

$$u'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\, tg(x) \cdot u(x) \cdot \frac{1}{2}$$

Quindi possiamo scrivere la formula risolutiva dell'equazione lineare.

$$u(x) = c \cdot e^{\overset{-\log\cos x}{\overset{''}{A(x)}}} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)} \cdot \underbrace{b(t)}_{\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$c \cdot e^{-\log(\cos x)} + \int_{x_0}^{x} e^{-\log|\cos x| + \log|\cos t|} \cdot \frac{1}{2}\, dt =$$

$$\frac{c}{|\cos x|} + \int_{x_0}^{x} \frac{|\cos t|}{|\cos x|} \cdot \frac{1}{2}\, dt$$

quando $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $|\cos x| = \cos x$ e quindi

$$u(x) = \frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \int \cos t\, dt =$$

$$= \frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \underbrace{\frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x}$$

sol. generale dell'eq. lineare per la funzione ausiliare $u(x)$, per cui

$$u(0) = \frac{c}{\cos 0} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 0 = 1 \Rightarrow c = 1$$

In definitiva la soluzione $u(x)$ è la seguente:

$$u(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x)$$

con $u(x) = \sqrt{y(x)}$ quindi

$$\sqrt{y(x)} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \cancel{(x)}$$ per cui

$$y(x) = \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x\right)^2$$ e questa è la soluzione del problema di Cauchy associato ai valori iniziali e l'eq. di Bernoulli data.

ALCUNI TIPI DI EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE

(7) Sono equazioni del tipo

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

ha derivate prime e seconde continue su un intervallo I

con $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to A$, A aperto, una funzione ($y(x)$ è soluzione dell'equazione data se è di classe $C^2(I)$ su un intervallo I,
se $(x, y(x), y'(x))^T$ sta in A, per ogni $x \in I$, e
se soddisfa identicamente la (7).

POSSIAMO DIMOSTRARE UN TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITA' IN QUESTO MODO :

Se f, f_y e f_z sono continue in A, allora si può dimostrare che esiste una e una sola soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x^0) = y^0 \\ y'(x^0) = z^0 \end{cases}$$

Un tipo d'equazioni che possiamo affrontare è il seguente:

(8) $y''(x) = f(y(x))$

nel quale f dipende solo da y ed è di classe $C^1(J)$ con J aperto in $\mathbb{R}$.

Moltiplicando i due membri di (8) per $y'(x)$, si trova, se indichiamo con $F(u)$ una primitiva di $f(u)$,

$$(y'(x))^2 = 2\left[F(y(x)) - F(y^0)\right] + (z^0)^2$$

il valore della derivata prima nel punto x^0

Questa equazione, trattata con prudenza, si può ridurre a una equazione del primo ordine, a variabili separabili.

Esempio: risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y''(x) = 3 \cdot y^2 \;,\; y(0) = 2^{\left(-\frac{1}{3}\right)} \;;\; y'(0) = 1$$

soluzione: si trova, procedendo come sopra:

$$(y'(x))^2 - 1 = 2\,y^3(x) - 1 \quad \text{e poiché } y'(0) > 0$$

si risolve col segno positivo.

ci si riduce al problema di Cauchy

$$y'(x) = \left[2\,y^3(x)\right]^{(1/2)} \;;$$
$$y(0) = 2^{-1/3}$$

trovando la soluzione

$$y(x) = \left(2^{\frac{1}{6}} - x \cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$$

LEZ. 18 SISTEMI DI EQUAZIONI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Prof. Gino Tironi
41'30"

Eq. e sistemi d'eq. diff ordinarie
sistemi d'eq. diff ordinarie lineari a coeff continui

LEZ. 19 SISTEMI DI EQUAZIONI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI I

Prof Gino Tironi

EQ. DIFF. LINEARI A COEFF. COST.
EQUAZIONE COMPLETA

LEZ. 20 SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Prof. Gino Tironi

TERMINI NOTI DI TIPO PARTICOLARE
OSCILLAZIONI FORZATE
ACCENNO AI SISTEMI CON COEFF. COST.

LEZ. 21 INTEGRALE (DI RIEMANN) PER FUNZIONI DI DUE O TRE VARIABILI SU RETTANGOLI

Prof. Gino Tironi
38'55"

DEFINIZIONE DI INTEGRALI DOPPI E TRIPLI SECONDO RIEMANN
PROPRIETA' DELL'INTEGRALE. CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI

DEFINIZIONE DI INTEGRALI DOPPI E TRIPLI SECONDO RIEMANN

INTRODUZIONE simile a quella per una sola variabile

I casi di funzioni di due o tre variabili sono quelli che ci interessano di più, ma, in via di principio, lo stesso metodo è applicabile a funzioni di più variabili reali ($m > 3$).

Sia dunque dato un intervallo o rettangolo chiuso I in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (più in generale in $\mathbb{R}^m$)

$$I = [\underbrace{a, b}_{x \text{ si muove tra } a \text{ e } b}] \times [\underbrace{c, d}_{y \text{ si muove tra } c \text{ e } d}] \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m] \quad \text{in } \mathbb{R}^m$$

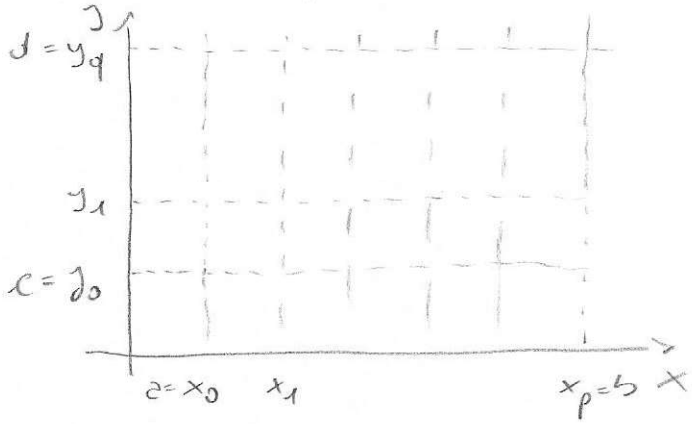
Diremo scomposizione o decomposizione del rettangolo I un insieme finito di punti di suddivisione sugli assi x, y, z (in generale sugli assi $x^1, x^2, \dots, x^m$) disposti come segue:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_q = d$$
$$e = z_0 < z_1 < \dots < z_r = f$$

Alternativamente si può dire decomposizione di I la famiglia finita dei sottorettangoli

$$I_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], \quad i = 1, \dots, p;\ j = 1, \dots, q;\ k = 1, \dots, r$$

Qui abbiamo descritto la situazione in $\mathbb{R}^3$; successivamente rappresentiamo graficamente la situazione in $\mathbb{R}^2$.



Sia ora data una funzione a valori reali e limitata

$$f : I \subset \mathbb{R}^s \to \mathbb{R} \quad (s = 2, 3, \dots, N)$$

intervallini

Poiché f è limitata su tutto I, lo sarà su ogni I_{ij} (consideriamo da ora in poi, per maggiore semplicità, il caso bidimensionale).

Sia $m_{ij} = \inf \{ f(x,y) : (x,y)^T \in I_{ij} \}$

e sia

$$M_{ij} = \sup \{ f(x,y) : (x,y)^T \in I_{ij} \}$$

Indicheremo con la lettera δ una decomposizione finita di I e con $D(I)$ l'insieme di tutte le decomposizioni finite di I.

Data una decomposizione δ di I, considereremo le somme inferiori relative alla funzione f e a δ

$$s(f, \delta) = \sum_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Diremo poi somme superiori

$$S(f, \delta) = \sum_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} M_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Come si è fatto nel caso di dimensione 1, si può introdurre fra le decomposizioni di I una relazione di finezza: δ_1 è più fine di δ_2 se, su ogni asse, i punti di suddivisione di δ_1 sono un soprainsieme dei punti di decomposizione di δ_2. (SIA SULL'ASSE X CHE SULL'ASSE Y)

Cioè, se δ_2 è individuata dai punti di suddivisione sull'asse x e y rispettivamente $\{a = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_{p''} = b\}$ e $\{c = y''_0 < y''_1 < \dots < y''_{q''} = d\}$, mentre δ_1 è individuata da $\{a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{p'} = b\}$ e $\{c = y'_0 < y'_1 < \dots < y'_{q'} = d\}$, diremo che δ_2 è meno fine di δ_1 (e scriveremo $\delta_2 \prec \delta_1$ e $\delta_1 \succ \delta_2$) se

12'

13'30'

La relazione introdotta è una relazione d'ordine tra decomposizioni di I, che è un ordine parziale.
Infatti esistono decomposizioni inconfrontabili. (vedi slide di es. 14'50'')

Si verifica, come nel caso unidimensionale, che date due decomposizioni δ_1 e δ_2 ne esiste una δ che è più fine di entrambe.
Basta prendere quella che ha, su ogni asse, l'unione dei punti di decomposizione di δ_1 e δ_2.
Inoltre, se $\delta_1 \triangleright \delta_2$ si verifica che $s(f, \delta_1) \geq s(f, \delta_2)$ e $S(f, \delta_1) \leq S(f, \delta_2)$.
Questo fatto ci permette di riconoscere che le due classi delle somme inferiori e superiori sono separate.

(suddivisioni finite) (somme)

Cioè, per ogni δ_1 e δ_2 in $D(I)$, vale $s(f, \delta_1) \leq S f(\delta_2)$

Infatti è ovvio che per ogni δ data sia $s(f, \delta) \leq S(f, \delta)$

Date poi δ_1 e δ_2 e detta δ una decomposizione più fine di entrambe si ha

$$s(f, \delta_1) \leq s(f, \delta) \leq S(f, \delta) \leq S(f, \delta_2)$$

Allora potremo considerare $\sup \{ s(f, \delta) : \delta \in D(I) \}$

Il numero reale così ottenuto si dice l'integrale inferiore (secondo Riemann) di f esteso a I.

estremo inferiore delle somme superiori

Analogamente $\inf\{S(f,\delta) : \delta \in D(I)\}$ è detto integrale superiore di f esteso a I.

Gli integrali inferiore e superiore si indicano talvolta con i simboli

indicano le aree di tutti gli intervallini piccoli, elementari

$$\underbrace{\iint_I^{-}}_{\text{intervallo rettangolo}} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_I^{-} f(x,y)\, \underbrace{dm}_{\text{area intervalli elementari}}$$

e rispettivamente

Integrale superiore esteso a I di $f(x,y)$

$$\iint_I^{+} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_I^{+} f(x,y)\, dm$$

nel caso di integrali doppi.

Qui $dx\,dy$ è posto per ricordare l'area o misura del sottorettangolo $I_{ij} \in \delta$.
Allo stesso scopo si scrive più genericamente dm.

Se accade che le classi delle somme inferiori e superiori siano contigue, cioè se accade che l'integrale superiore e inferiore siano uguali, allora la funzione si dice secondo Riemann **l'integrale** (secondo Riemann) di f esteso a I.
Scriveremo

$$\iint_I f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_I^{-} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_I^{+} f(x,y)\, dx\, dy$$

Analogamente definiremo

(Integrale esteso a I di ...)

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_I f(x,y,z)\,dm =$$

$$= \iiint_I^- f(x,y,z)\,dm = \iiint_I^* f(x,y,z)\,dm$$

Nel caso dell'integrale triplo dm è indicato anche con $dx\,dy\,dz$ e ricorda il volume del sottorettangolo I_{ijk}.

Come nel caso unidimensionale vale la seguente condizione di integrabilità di Riemann:

TEOREMA (Condizione di integrabilità di Riemann)

$f: I \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(m = 2, 3, \dots)$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in D(I)$ (decomposizione di) tale che
$$S(f,\delta) - s(f,\delta) < \varepsilon$$

Data la decomposizione $\delta = \{I_\alpha\}$ e posto
$m_\alpha = \inf\{f(x) : x \in I_\alpha\}$ (x vettoriale) e $M_\alpha = \sup\{f(x) : x \in I_\alpha\}$ (x vettoriale),
diremo oscillazione di f su I_α

$$\omega_\alpha = M_\alpha - m_\alpha$$

Allora la condizione di integrabilità diviene: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in D(I)$ tale che

$$\sum_\alpha \omega_\alpha\, m(I_\alpha) < \varepsilon$$

Dove α sta al posto di ij o ijk e $m(I_\alpha) = (x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$ e simili.

Si prova allora immediatamente che:

TEOREMA

Ogni funzione $f: \overset{\text{rettangolo } I}{I} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(m = 2, 3, \dots)$ se è continua è integrabile su I

Infatti sappiamo che se f è continua su I chiuso e limitato, allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho > 0$ (dipendente da ε) tale che se $x, y \in I$ e $|x - y| < \rho$ è $|f(x) - f(y)| < \varepsilon / \underset{\text{misura di } I}{m(I)}$. (Teorema di Heine - Cantor) (uniformemente I)

Data una decomposizione δ, diciamo $diam(\delta) = \max\{diam(I_\alpha) : I_\alpha \in \delta\}$ lunghezza di diagonale maggiore di un rettangolino.

Se δ è una qualsiasi decomposizione avente $diam(\delta) < \rho$, poiché per Weierstrass

$$m_\alpha = \min\{f(x) : x \in I_\alpha\} = f(x_\alpha') \quad e$$

$$M_\alpha = \max\{f(x) : x \in I_\alpha\} = f(x_\alpha''), \quad \text{allora}$$

$$\omega_\alpha = \underbrace{f(x_\alpha'')}_{\text{il max}} - \underbrace{f(x_\alpha')}_{\text{il min}} < \varepsilon / m(I) \quad , \text{perciò}$$

$$\sum_\alpha \omega_\alpha\, m(I_\alpha) < \varepsilon / m(I)\, \sum_\alpha m(I_\alpha) = \varepsilon$$

Dunque tutte le funzioni continue sono integrabili su intervalli I (rettangoli o parallelepipedi).

Si possono poi dimostrare i soliti teoremi sulla struttura dell'insieme delle funzioni integrabili su I.

TEOREMA DI LINEARITÀ

Se f e g sono integrabili su I e λ, μ sono numeri reali, allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile su I e vale

$$\int_I (\lambda f + \mu g)\, dm = \lambda \int_I f\, dm + \mu \int g\, dm$$

TEOREMA DI MONOTONIA

Se f e g sono integrabili su I e $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in I$, allora

$$\int_I f\, dm \leq \int_I g\, dm$$

In particolare, se $f(x) \geq 0\ \forall x \in I$,

$$\int_I f\, dm \geq 0$$

TEOREMA DEL VALORE ASSOLUTO

Se f è integrabile su I lo è anche $|f|$ e si ha:

$$\left| \int_I f \, dm \right| \leq \int_I |f| \, dm$$

TEOREMA DELLA MEDIA

Se f è integrabile su I e $\bar{I} = \inf\{f(x) : x \in I\}$, $L = \sup\{f(x) : x \in I\}$, allora si ha:

$$\bar{I} \cdot m(I) \leq \int_I f \, dm \leq L \cdot m(I)$$

In particolare se f è continua su I

$$\int_I f \, dm = f(x_0) \cdot m(I)$$

dove $x_0 \in I$ e $m(I)$ è la misura (area o volume) del rettangolo I.

Il numero $\mu = \frac{1}{m(I)} \int_I f \, dm$

si dice la media integrale di f su I.

TEOREMA DEL PRODOTTO

Se f e g sono integrabili su I allora lo è $f \cdot g$

TEOREMA DI ADDITIVITA' SUL DOMINIO

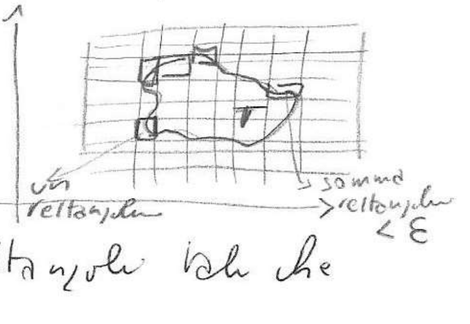
Se f è integrabile su I_1 e su I_2, che hanno solo una faccia in comune, allora è integrabile su $I = I_1 \cup I_2$ e l'integrale è la somma degli integrali.

INSIEMI TRASCURABILI

PER AMPLIARE LA CLASSE DELLE FUNZIONI INTEGRABILI.

Un insieme limitato $T \subset \mathbb{R}^m$ si dice trascurabile (o di misura elementare nulla ↳ secondo Peano-Jordan) se, detto I un rettangolo che lo racchiude, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione δ di I, tale che

$$\underbrace{\sum_{\beta} m(I_\beta)}_{\text{somma di tutti i rettangolini che contengono punti di } T} < \varepsilon$$



Dove sono stati indicati con I_β quei sottorettangoli tali che $I_\beta \cap T \neq \emptyset$.

Si può allora dimostrare che una funzione limitata $f: I \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è R-integrabile se l'insieme D_f dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Questo risultato amplia notevolmente la classe delle funzioni R-integrabili. (in $\mathbb{R}^2$ una f discontinua solo su una linea continua, risulterà integrabile)

21.10

LEZ 22 FORMULE DI RIDUZIONE PER INTEGRALI DOPPI E TRIPLI

Prof. Gino Tironi
40'21"

- Formule di Riduzione gli integrali doppi e tripli
- Integrazione su insiemi limitati di $\mathbb{R}^m$

FORMULE DI RIDUZIONE PER INTEGRALI DOPPI E TRIPLI

Abbiamo introdotto la nozione di integrale doppio e triplo (come elemento di separazione di classi inferiori e superiori) e abbiamo dato condizioni sotto le quali un siffatto integrale esiste. MA NON ABBIAMO DATO METODI PRATICI DI CALCOLO.

Cominceremo con gli integrali estesi a rettangoli. Ridurremo il calcolo di un integrale doppio al calcolo di due integrali semplici iterati.

TEOREMA DI RIDUZIONE PER INTEGRALI DOPPI

Se $f: I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è integrabile sul rettangolo $I = [a,b] \times [c,d]$ in $\mathbb{R}^2$ e se per ogni $x \in [a,b]$ $f(x,y)$ è integrabile rispetto a y su $[c,d]$ allora è integrabile su $[a,b]$ la funzione della sola x

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \quad \text{e si ha}$$

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

DIMOSTRAZIONE

Infatti, sia δ una decomposizione di I individuata dai punti di suddivisione $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$ e $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_q = d$

Se $(x, y) \in I_{ij}$, allora $m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$

Integrando su $[y_{j-1}, y_j]$ si trova

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\, dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

Sommando su $j = 1, \ldots, q$

$$\sum_{j=1}^{q} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(x, y)\, dy \leq \sum_{j=1}^{q} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

Allora $g(x)$ è limitata su $[x_{i-1}, x_i]$

$$\sum_{j=1}^{q} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq m_i^g \leq M_i^g \leq \sum_{j=1}^{q} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

Moltiplicando per $(x_i - x_{i-1})$ e sommando su $i = 1, \ldots, p$

$$s(f, \delta) \leq s(g, \delta_x) \leq S(g, \delta_x) \leq S(f, \delta)$$

Poiché, per ipotesi, le classi delle somme esterne sono contigue, lo sono quelle relative alla $g(x)$.
Quest'ultima è integrabile e l'integrale di $g(x)$ su $[a, b]$ uguaglia l'integrale doppio su I, per l'unicità dell'elemento di separazione fra coppie di classi contigue. Dunque abbiamo dimostrato:

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

Se ricorrono le opportune ipotesi, si possono scambiare i ruoli di x e y

↳ che f sia integrabile sull'intervallo I. $\forall y$ la $f(x,y)$ come f della sola x sia integrabile fra a e b.

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Esempi e controesempi

1. Calcolare $\iint_I x \underbrace{\operatorname{sen}(xy)}\,dx\,dy$ dove $I = [0,1] \times [0, \pi/2]$

↳ è integrabile, per ogni assegnato x, rispetto a y.

La funzione $\operatorname{sen}(x \cdot y)$, per ogni assegnato x, è integrabile rispetto a y, quindi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(xy)\,dy = -\frac{1}{x} \cdot \cos xy \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + \frac{1}{x} \cdot \overset{1}{\cos 0} = -\frac{1}{x} \cos \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{x}$$

Ora dobbiamo calcolare:

primitiva è $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} x \cdot \frac{2}{\pi}$

$$\int_0^1 x \cdot \frac{1}{x}\left(1 - \cos \frac{\pi}{2} x\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} x\right) dx = 1 - \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x\,dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}$$ calcolato come integrale iterato

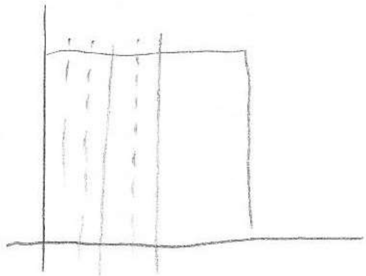
incrementato fra 0 e 1

La validità del teorema dipende naturalmente dal verificarsi delle ipotesi.

2. Controesempio $\quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

su $I = [0,1] \times [0,1]$.

Per ogni x esiste $\int_0^1 (x,y)\,dy$, ma $f(x,y)$ non è integrabile su I.



perché per ogni intervallo capiterà sia una x razionale, sia una x irrazionale. Quindi per ogni intervallino, l'estremo inf è 0 e quello sup. è 1. E allora le somme superiori varranno sempre 1 e quelle inf sempre 0. Le classi sono separate ma non sono contigue.

In maniera analoga si dimostrano le formule di riduzione per rettangoli di $\mathbb{R}^3$. Ne abbiamo due tipi.

FORMULA DI RIDUZIONE PER CORDE IN $\mathbb{R}^3$

FORMULA DI RIDUZIONE PER SEZIONI PIANE IN $\mathbb{R}^3$

26' →

INTEGRAZIONE SU INSIEMI LIMITATI DI $\mathbb{R}^m$

I domini d'integrazione per gli integrali multipli sono, in generale, più complessi dei rettangoli.
Tuttavia la teoria dell'integrazione sui rettangoli si rivelerà utile per estendere i nostri procedimenti a situazioni più complesse.

Sia data una funzione $f: E \subset (I \subset) \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ su un insieme limitato E. Essendo limitato, E è contenuto in un rettangolo ~~di~~ I di $\mathbb{R}^2$.

Si consideri allora una funzione ausiliaria

$$\overline{f(x,y)} = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \in I \setminus E \end{cases}$$

punti che non stanno nel rett $(I - E)$

Proponiamo dunque la seguente definizione:
Diremo che $f(x,y)$ è integrabile su E se $\overline{f(x,y)}$ è integrabile su I.

Osserviamo che se $f(x,y)$ è continua su E, gli eventuali punti di discontinuità di f sono contenuti nella frontiera di E: ∂E.

Dunque se $f(x,y)$ è continua e ∂E è trascurabile, allora $\overline{f}$ è integrabile su I e quindi f lo è su E.
Porremo, per definizione:

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_I \overline{f(x,y)}\,dx\,dy$$

Ovviamente, una definizione analoga si porrà per gli integrali tripli, multipli.

Prendendo spunto da questa definizione, possiamo proporre la seguente definizione di misura di un insieme limitato E di $\mathbb{R}^m$ (area o volume per $m=2,3$).

Diremo misura di E: $m(E) = \int_E 1 \, dm$

Da quanto abbiamo detto, è chiaro che se ∂E è trascurabile, allora E (limitato) è misurabile.
La nozione di misura qui introdotta si dice misura elementare o di Peano-Jordan.
Si può dimostrare che l'essere ∂E trascurabile è condizione non solo sufficiente, ma anche necessaria per la misurabilità.

Infine si noti che i segmenti paralleli agli assi in $\mathbb{R}^2$, i piani paralleli ai piani coordinati in $\mathbb{R}^3$ e i grafici di funzioni continue in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ sono tutti insiemi trascurabili.
Inoltre l'unione finita di insiemi trascurabili è trascurabile.

Dunque le frontiere dei domini che usualmente considereremo saranno trascurabili e i domini misurabili.

Ciò detto, torniamo alle formule di riduzione su certi domini che diremo normali agli assi.

un dominio

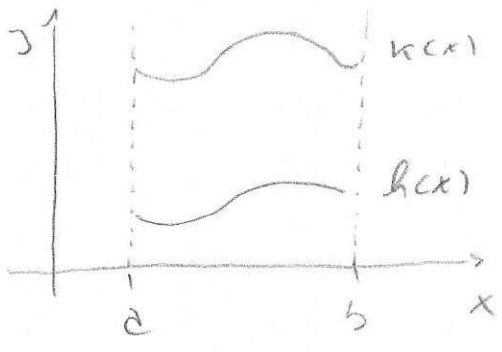
$E \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x se esistono due funzioni continue $h(x)$ e $k(x)$, tali che
$E = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \; h(x) \leq y \leq k(x)\}$

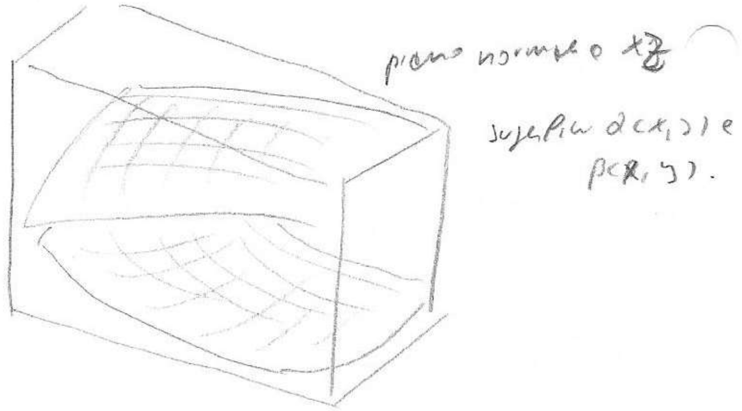
$E = \{(x,y) : c \leq y \leq d,\ u(y) \leq x \leq v(y)\}$

Si dice normale rispetto all'asse y; $u(y)$ e $v(y)$ sono funzioni continue su $[c,d]$.

Analogamente si definiranno i domini normali rispetto ai piani xy, yz, zx in $\mathbb{R}^3$.

Domini normali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:





Supponiamo che $f(x,y)$ sia una funzione continua e limitata su un dominio E, normale rispetto all'asse x.
Allora esiste l'integrale doppio su un rettangolo $I \supset E$ contenente
(perché $\bar{f}$ è discontinua su insieme trascurabile);
per ogni x esiste l'integrale su $[c,d]$ di $\bar{f}(x,y)$ (perché, assegnato x, $\bar{f}(x,y)$ come funzione di y è discontinua al più in $h(x)$ e $k(x)$). Perciò l'integrale doppio si può calcolare come integrale iterato, e si avrà

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Per gli integrali tripli

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iint_{E_{xy}} \left(\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

ESEMPI

Area ellisse

...

22.10

LEZ 23 CAMBIAMENTO DI VARIABILI
Prof Gino Tironi
40'41''
IN INTEGRALI DOPPI E TRIPLI

- Cambiamento di variabili per ...
- Applicazioni al calcolo di aree, volumi, baricentri, momenti

CAMBIAMENTO DI VARIABILI
IN INTEGRALI DOPPI E TRIPLI (teorema molto sofisticato)

nozione di funzione localmente invertibile

Abbiamo affermato che se $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, A aperto, è di classe $C^1(A)$, e se $\det J(\underset{\sim}{f})(x^0) \neq 0$ allora f è localmente invertibile; cioè esistono intorni aperti U di x^0 e V di $y^0 = f(x^0)$ tra i quali f è biiettiva; dunque $f(U) = V$

Sappiamo che se una trasformazione è regolare, essa ha il determinante jacobiano non nullo in ogni punto del dominio e quindi $f(A)$ è aperto anche se f non è necessariamente iniettiva su A.

Una siffatta f è adatta a definire un cambiamento di variabili. Si può dimostrare poi che i punti singolari non costituiscono un insieme molto grande (ha misura nulla secondo Lebesgue: Teorema di Sard).

se la f è regolare:
Inoltre l'inversa locale tra gli intorni aperti V e U è di classe $C^1(V)$ e la sua matrice jacobiana è l'inversa della matrice jacobiana di f.

Con queste precisazioni, possiamo enunciare il teorema sul cambiamento di variabili negli integrali multipli.

TEOREMA CAMBIAMENTO DI VARIABILI

Sia $h : U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset \mathbb{R}^m$ (a valori in $(\to)$), U, V aperti, regolare e di classe $C^1(U)$, sia $E \subset U$ un compatto (chiuso e limitato di $\mathbb{R}^m$) PJ-misurabile e $f : h(E) \to \mathbb{R}$ integrabile.
Allora è integrabile $f \cdot h$ su E e si ha

$$\int_{h(E)} f(y)\,dy = \int_E f(h(x))\,|\det h'(x)|\,dx$$

Per brevità di notazione abbiamo indicato $y = h(x)$ e scritto $h'(x)$ al posto della matrice jacobiana.
È chiaro che questa trasformazione di coordinate è conveniente se l'integrazione su E è più agevole di quella su $h(E)$; per esempio se E è un rettangolo e la nuova funzione da integrare non è troppo complicata.

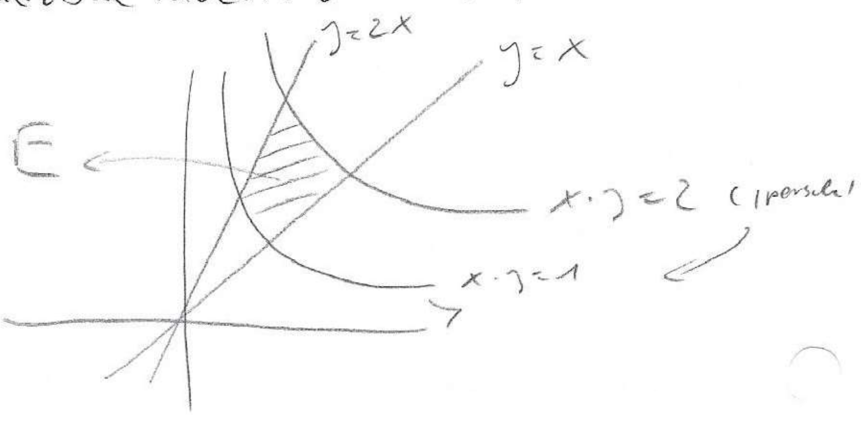
Si voglia calcolare $\iint_E (x+y)\,dx\,dy$ con $E = \{(x,y) : 0 < x \le y \le 2x,\ 1 \le xy \le 2\}$

Posto $u = xy$ e $v = y/x$, la trasformazione h così individuata manda l'insieme E del piano xy nel rettangolo $J = [1,2] \times [1,2]$ del piano uv. La trasformazione inversa di h è:

$$g(u,v) : \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{u \cdot v} \end{cases}$$

che ha determinante jacobiano

$\det g'(u,v) = \frac{1}{2}v > 0$



n.b.:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$u \cdot v = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{uv}$

$\frac{u}{v} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{u}{v}}$

Dunque

$$\iint_E (x+y)\,dx\,dy =$$

$$\iint_J \left(\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv}\right) \cdot \frac{1}{2v}\,du\,dv$$

$\hookrightarrow$ rettangolo

A conti fatti si trova $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$.
Il dominio è divenuto un rettangolo e la funzione non troppo complicata.

I tipi di trasformazione di coordinate più comuni, sono quelle ~~dei~~ di coordinate polari (o polari ellittiche) nel piano; il cambiamento di coordinate cilindriche (o cilindriche ellittiche) e il cambiamento di coordinate sferiche (o ellissoidali) nello spazio.

COORDINATE POLARI

sono individuate:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi$$

sappiamo che questa trasf ha un solo punto singolare: l'origine $(0,0)^T$, infatti il suo det. Jacobiano è:

$$\det J\begin{pmatrix} x & y \\ \rho & \vartheta \end{pmatrix} = \rho,$$

la trasformazione è biiettiva tra
$\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)^T$, e $\{(\rho,\vartheta) : \rho > 0,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi$
privato

Cioè vi è corrispondenza biunivoca tra tutto il piano xy privato dell'origine e una striscia infinita nel piano $\rho\,\vartheta$.
Se indichiamo con $h^{-1}(x,y)$ la trasformazione che a ρ, ϑ

Per corrispondere x, y abbiamo

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{h^{-1}(E)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

Se il dominio E è un'ellisse o parte di essa di semiassi a e b, è conveniente usare le coordinate polari ellittiche $x = a\cdot\rho\cdot\cos\vartheta$, $y = b\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$.
Il determinante jacobiano è $ab\rho$.

Mostriamo l'utilità nel calcolo dell'area di un'ellisse o del volume di un ellissoide.

Sia $E = \{(x,y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$

$$m(E) = \int_E\int_E dx\,dy = \iint_{h^{-1}(E)} ab\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

Si trova facilmente $m(E) = \pi ab$

$$\int_0^1 ab\rho\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta$$

$\to$ Prodotto dell'ellisse avente $\rho \leq 1$, è formato dalle coppie (ρ, ϑ): $0 < \rho < 1$ e $0 < \vartheta < 2\pi$.

$h^{-1}(E)$ è il rettangolo $[0,1)$ nell'asse del ρ $\times$ $[0,2\pi)$ per l'asse del ϑ

Calcolo del volume di un ellissoide

$$E = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

quando $a = b = c = 2$, volume sfera!

Si trova dopo qualche calcolo non difficile, $m(E) = (4/3)\pi abc$

Il calcolo in coordinate cartesiane presenterà invece qualche difficoltà.

Coordinate cilindriche

Sono le coordinate così individuate

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \\ z = u \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi,\ u \in \mathbb{R}$$

Il determinante jacobiano di questa trasformazione è ρ.
L'asse z è fatto di punti singolari.
La trasformazione è biunivoca tra l'aperto dato da $\mathbb{R}^3 \setminus \{asse\ z\}$ dello spazio $x\,y\,z$ e l'aperto $\rho > 0$, $0 < \vartheta < 2\pi$, $u \in \mathbb{R}$, dello spazio $\rho\,\vartheta\,u$.
Si può combinare questa trasformazione con quella delle coordinate ellittiche

Coordinate sferiche

Sono

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi$$

Il determinante jacobiano di questa trasformazione è $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$.
L'asse z è fatto tutto di punti singolari.
La trasformazione è biunivoca tra l'aperto dato da $\mathbb{R}^3 \setminus \{asse\ z\}$ dello spazio $x\,y\,z$ e l'aperto $\rho > 0$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < \vartheta < 2\pi$ dello spazio $\rho\,\varphi\,\vartheta$. Si può combinare questa trasformazione con quella delle coordinate ellittiche.
Il volume dell'ellissoide con questa trasformazione è:

$$E = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

$$\iiint_E dx\,dy\,dz = abc \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \qquad \left(\begin{matrix}\text{3 integrali}\\ \text{semplici}\\ \text{iterati}\end{matrix}\right)$$

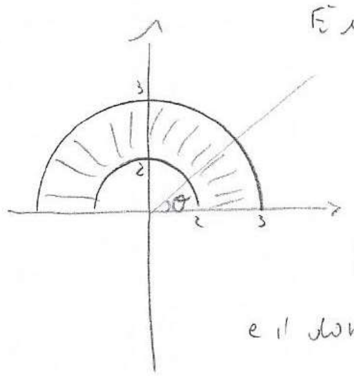
trovando finalmente $\frac{4}{3}\pi abc$

Applicazioni al calcolo di aree, volumi, baricentri, momenti

1) Calcolare $\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

dove E è la semicorona circolare con $y \geq 0$ compresa tra i cerchi di raggio 2 e 3 e centro nell'origine.

È utile il cambiamento di coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad (x,y)^T \in E \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow \text{sen}\,\vartheta \geq 0 \Rightarrow$$

e il dominio trasformato sarà $h^{-1}(E)$: $\underbrace{0 \leq \vartheta \leq \pi}_{180°}$, $2 \leq \rho \leq 3$

$$\iint_{h^{-1}(E)} \rho \cdot \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_2^3 \rho^2\, d\rho \cdot \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta}_{\pi} = \pi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=2}^{\rho=3} = \frac{\pi}{3}(27-8)$$

$x^2+y^2 = \rho$

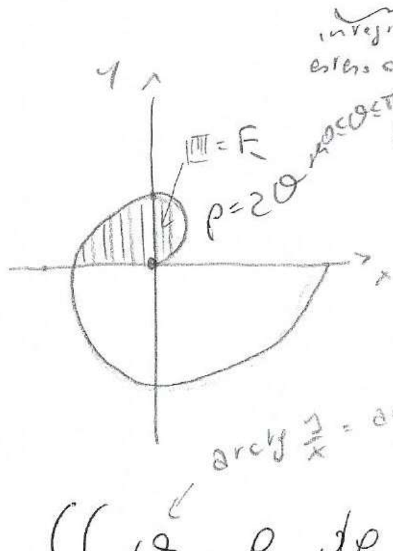
elemento di volume è lo jacobiano

riduzione dell'integrale iterato. Prima quello rispetto a ϑ

incrementato ma

---

2) Calcolare $\underbrace{\iint_E}_{\text{integrale esteso a E}} \text{arctg}\,\frac{y}{x}\,dx\,dy$ dove E è la parte del piano compresa tra la spirale di Archimede di equazione $\rho = 2\vartheta$ per $\underbrace{0 \leq \vartheta \leq \pi}_{180°}$ e l'asse x.



UTILE LA TRASF. IN COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

$\text{arctg}\,\frac{y}{x} = \text{arctg}\,\frac{\rho\,\text{sen}\,\vartheta}{\rho\cos\vartheta} = \text{arctg}\,\frac{\text{sen}\,\vartheta}{\cos\vartheta} = \text{arctg}\,\text{tg}\,\vartheta = \vartheta$

$$\iint_{h^{-1}(E)} \vartheta \cdot \rho \cdot d\rho\, d\vartheta = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\vartheta} \vartheta \cdot \rho \cdot d\rho = \int_0^\pi \vartheta\, d\vartheta \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\vartheta} =$$

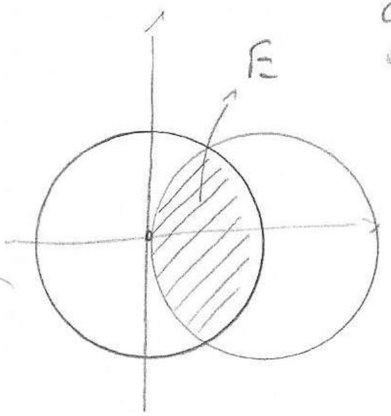
costante rispetto alla var. di integrazione

$$= 2\int_0^\pi \vartheta \cdot \vartheta^2\, d\vartheta = \ldots = \frac{\pi^4}{2}$$

23.6

3) Calcolare $\iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy$

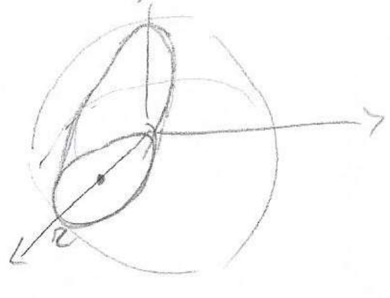
dove E è la parte di piano compresa fra l'asse x, la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine e la circonferenza di raggio 1 e centro in $(1,0)^T$.



conveniente la trasl, alle coordinate polari

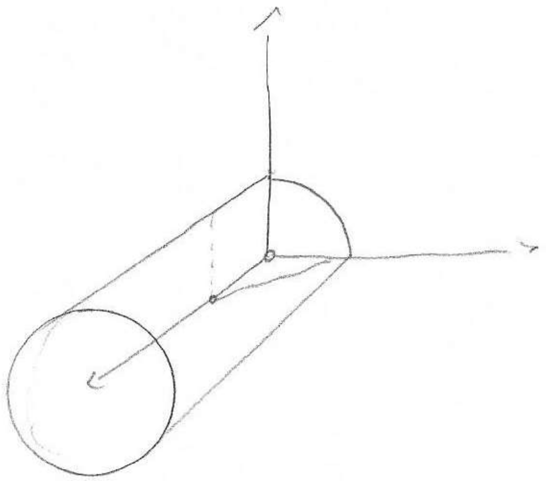
Si calcolino i seguenti volumi:

1) Volume della porzione di semisfera per $z \geq 0$ che si proietta sul piano xy sulla circonferenza di diametro r e centro in $(\underbrace{r/2}_{\frac{1}{2}r}, 0)^T$. $\left[\frac{3\pi - 4}{9} \cdot r^3\right]$



23.7

2) Volume della porzione di cilindro circolare di equazione $z = \sqrt{1-x^2}$, che si proietta sul piano xy sul triangolo rettangolo di vertici $(0,0)^T$, $(1,0)^T$, $(0,1)^T$ $[\frac{2}{3}\pi]$



3) Volume della porzione di superficie parabolica d'equazione $2pz = x^2+y^2$ che si proietta sul piano xy in un cerchio con centro nell'origine e raggio 2

BARICENTRI

Il baricentro di una lamina piana E e densità unitaria è dato dal punto di coordinate

$$\bar{x} = \frac{\iint_E x\,dx\,dy}{m(E)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_E y\,dx\,dy}{m(E)}$$

Si calcolino i seguenti baricentri:

1) Di un triangolo rettangolo
2) Di un settore circolare
3) Di una semiellisse
4) Di un segmento di parabola

MOMENTI DI INERZIA

Il momento di inerzia di un solido di densità unitaria rispetto a un asse assunto come asse z, solido che occupa la regione dello spazio E, è dato da:

$$M = \iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

Si calcolano i seguenti momenti di inerzia

1) Di un parallelepipedo rettangolo, rispetto ad uno spigolo
2) Di un cilindro rotondo, rispetto all'asse
3) Di un ellissoide, rispetto ad un asse.